Дифференциальные уравнения

$$G(t, y, y', ..., y^{(n)}) = 0 \qquad (1)$$

$$y^{(n)} = F(t, y, y', ..., y^{(n-1)}) \qquad (2)$$

$$y = y(t)$$

$$\frac{dy}{dt} = 1 + \sin 2t$$

$$y = t - \frac{1}{2}\cos 2t + C$$

Описание линейных динамических систем дифференциальными уравнениями

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot y^{(i)} = \sum_{j=0}^{m} b_j \cdot x^{(j)},$$

где $$y^{(i)} = \frac{d^i y}{dt^i},\ x^{(i)} = \frac{d^j x}{dt^j},\ a_n = 1,\ m \le n$$

$$a_p y^n(t) + a_{p-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 y^{(1)}(t) + y(t) =$$

$$= b_m x^{(m)}(t) + b_{m-1} x^{(m-1)}(t) + \cdots + b_1 x^{(1)}(t) + x(t)$$

Преобразование Лапласа

$$L\left[f\left(t\right)\right]=F\left(\mathrm{p}\right)=\int_{0}^{\infty}f\left(t\right)\cdot e^{-pt}dt$$

f (t) - *оригинал*
F (p) - *изображение*

f(t) ÷ F(p)

Преобразование Лапласа

Если $f(t) \div F(p)$

то

$$f'(t) \div pF(p) - f(0)$$

$$f''(t) \div p^2 F(p) - pf(0) - f'(0)$$

здесь $f(0)$, $f'(0)$- нач.условия

Найти изображения следующих оригиналов:

- $E(t)$
- $\sin(\omega t)$
- $\cos(\omega t)$

Решение линейных дифференциальных уравнений с помощью преобразования Лапласа

$$x'' + 3x' + 2x = 0$$

$$x(0) = 0, x'(0) = 1$$

Найти передаточные функции по следующей системе уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 y}{dt^2} = a_1 \dfrac{dy}{dt} + a_2 \dfrac{dz}{dt} + a_3 z + a_4 x(t) \\ \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{dy}{dt} + b_1 z + b_2 x(t) \end{cases}$$

Определение процесса регулирования

$$W = \frac{10}{0.1p^2 + p + 10}$$

g(t)=E(t)

Определение процесса регулирования

X(p)=W(p)G(p)

$$X(p) = \frac{10}{p(0.1p^2 + p + 10)} = \frac{100}{p(p^2 + 10p + 100)}$$

Определение процесса регулирования

$$X(p) = \frac{A}{p} + \frac{Bp + C}{p^2 + 10p + 100}$$

Определение процесса регулирования

$$X(p)=\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+10p+100}-\frac{10}{p^2+10p+100}$$

Определение процесса регулирования

$$p^2 + 10p + 100 = (p+5)^2 + 75$$

Пример 5. Найти выходную величин y(t) системы, описываемой уравнением

$$T\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = g(t)$$

если

$g(t)=G_м*\sin(\omega t)$

$y(0)=y_0$

Численные методы решения дифференциальных уравненрий

Численные методы решения ДУ

$$y' = f(t, y)$$

$$y(t_0) = y_0$$

Численные методы решения ДУ

$$(t_m, y_m)$$

$$y_m' = f(t_m, y_m)$$

$$t_{m+1} = t_m + h$$

Численные методы решения ДУ

$$y = y_m + y_m^{'}(t - t_m)$$

$$y_m^{'} = f(t_m, y_m),\ t_{m+1} = t_m + h$$

$$y_{m+1} = y_m + h \cdot f(t_m, y_m) \quad (1)$$

Численные методы решения ДУ

$$t_m, y_m$$

$$t_m + h, y_m + h \cdot y_m^{'}$$

$$F_1(t_m, y_m, h) = \frac{1}{2}[f(x_m, y_m) + f(x_m + h, y_m + h \cdot y_m^{'}), \ a \quad y_m^{'} = f(x_m, y_m)$$

$$y = y_m + h \cdot F_1(t_m, y_m, h)$$

$$y_{m+1} = y_m + h \cdot F_1(t_m, y_m, h) \qquad (2)$$

Численные методы решения ДУ

$$F_2(t_m, y_m, h) = f(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h}{2} \cdot y_m^{'}), \; a \quad y_m^{'} = f(x_m, y_m)$$

$$y_{m+1} = y_m + h \cdot F_2(t_m, y_m, h) \quad (3)$$

Численные методы решения ДУ

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

где

$$k_1 = f(x_m, y_m)$$

$$k_2 = f(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h \cdot k_1}{2})$$

$$k_3 = f(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h \cdot k_2}{2})$$

$$k_4 = f(x_m + h, y_m + h \cdot k_3)$$

Численные методы решения ДУ

$$y' = y,$$

$$y(0) = 1.$$

Ðåøåíèå :

$$y(t) = c \cdot e^{t}.$$

Ïðè çàäàííîì íà÷àëüíîì óñëîâèè :

$$y(t) = e^{t}.$$

Численные методы решения ДУ

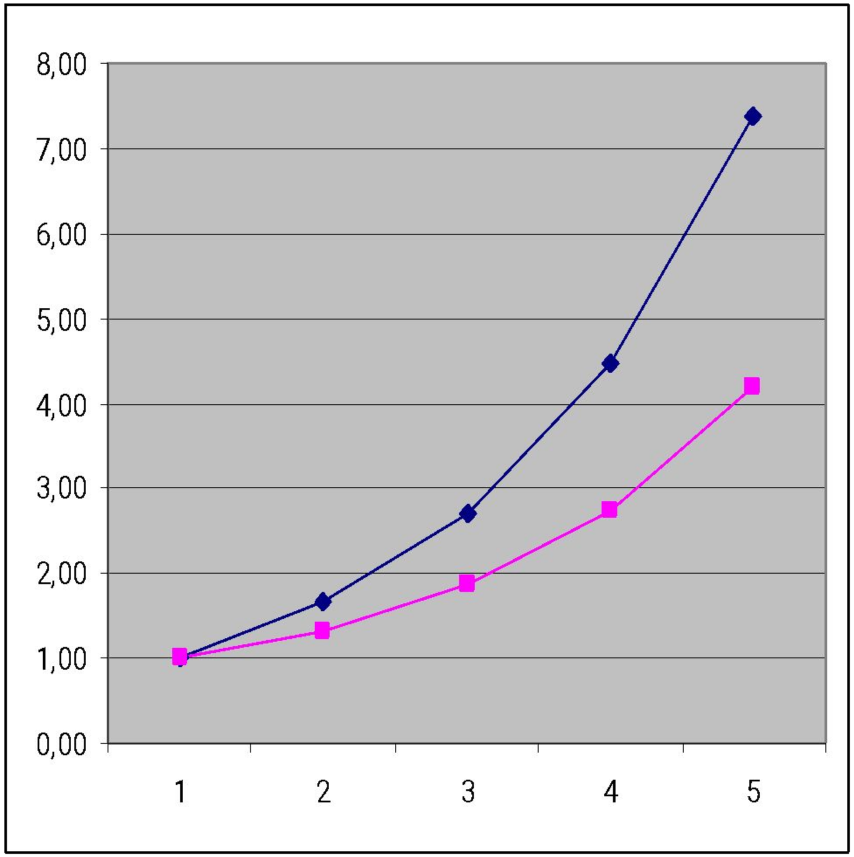
$$y' = y,$$
$$y(0) = 1.$$

$$y_{m+1} = y_m + h \cdot f(t_m, y_m) \quad (1)$$

[0,2];   h=0.5

t	exp(t)	Eiler
0,0	1,00	1,00
0,5	1,65	
1,0	2,72	
1,5	4,48	
2,0	7,39	

Численные методы решения ДУ



Численные методы решения ДУ

$$k_1 = y_m$$

$$k_2 = y_m + \frac{h}{2} y_m$$

$$k_3 = y_m + \frac{h}{2}(y_m + \frac{h}{2} y_m)$$

$$k_4 = y_m + h \cdot [y_m + \frac{h}{2}(y_m + \frac{h}{2} y_m)]$$

$$y_{m+1} = y_m \cdot (1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + \frac{h^4}{24})$$

Ðåøèòü çàäàííîå äèô .óðàâíåíèå :

1) *àíàëèòè÷åñêè*

2) *ìåòîäîì Ýéëåðà*

3) *ìåòîäîì Ðóíãå – Êóòòà*

íà èíòåðâàëå [0,2] *ñ øàãîì* 0,1.

Îòðàçèòü âñå òðè ðåøåíèÿ íà îäíîì ãðàôèêå.

Îöåíèòü îøèáêó

$$y' = y + 2,$$

$$y(0) = 0.$$