Бином Ньютона.

Содержание.

Понятие бинома Ньютона.

Биномом Ньютона называют разложение вида:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^m a^{n-m} b^m + \ldots + C_n^n a^0 b^n =$$

$$= a^n + n a^{n-1} b^1 + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2} b^2 + \ldots + \frac{n!}{(n-m)!\,m!} a^{n-m} b^m + \ldots + b^n, \ \textit{где} \ \ m < n$$

Но, строго говоря, всю формулу нельзя назвать биномом, так как «бином» переводится как «двучлен». Кроме того, формула разложения была известна еще до Ньютона, Исаак Ньютон распространил это разложение на случай n<0 и n – дробного.

Цель изучения бинома Ньютона – упрощение вычислительных действий.

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^m a^{n-m} b^m + \ldots + C_n^n a^0 b^n =$$

$$= a^n + n a^{n-1} b^1 + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2} b^2 + \ldots + \frac{n!}{(n-m)!\, m!} a^{n-m} b^m + \ldots + b^n,\ \text{где}\ m < n$$

Компоненты формулы «бином Ньютона»:

правая часть формулы – разложение бинома;

$C_n^0;\ C_n^1;\ \ldots\ C_n^n$ – биномиальные коэффициенты, их можно получить с помощью *треугольника Паскаля* (пользуясь операцией сложения).

общий член разложения бинома n-й степени $T_{m+1} = C_n^m a^{n-m} b^m,\ m = 0,1,2,\ldots n$

где Т – член разложения; – порядковый номер члена разложения.

К содержанию.

Свойства бинома и биномиальных коэффициентов.

- $C_n^0 = C_n^n = 1$
- Число всех членов разложения на единицу больше показателя степени бинома, то есть равно (n+l).
- Сумма показателей степеней *a* и *b* каждого члена разложения равна показателю степени бинома, то есть *n.*
- Биномиальные коэффициенты членов разложения, равноотстоящих от концов разложения, равны между собой: $C_n^m = C_n^{n-m}$ (правило симметрии).

- Сумма биномиальных коэффициентов всех членов разложения равна 2^n.
- Сумма биномиальных коэффициентов, стоящих на нечетных местах, равна 2^{n-1} сумме биномиальных коэффициентов, стоящих на четных местах и равна .

  $$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots = 2^{n-1}$$
- Правило Паскаля: $C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$.

- Любой биномиальный коэффициент, начиная со второго, равен произведению предшествующего биномиального коэффициента и дроби $\frac{n-(m-1)}{m}$.

$$C_n^m = C_n^{m-1} \cdot \frac{n-(m-1)}{m}$$

[К содержанию.]

Примеры решения задач по теме «Бином Ньютона».

Пример 1

В биномиальном разложении $\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)^{18}$ найти член разложения, не содержащий *x*.

Решение:

$$T_{m+1}=C_{18}^{m}\left(x^3\right)^{18-m}\left(\frac{1}{x^3}\right)^{m}=C_{18}^{m}\ x^{54-3m-3m}=C_{18}^{m}\ x^{54-6m}$$

Так как в разложении мы ищем член не содержащий *x*, то $54-6m=0\ \Rightarrow\ m=9$.

$$T_{9+1}=C_{18}^{9}=\frac{18!}{(18-9)!\ 9!}=\frac{10\cdot 11\cdot 12\cdot 13\cdot 14\cdot 15\cdot 16\cdot 17\cdot 18}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}=48620$$

Пример 2

Доказать, что при любом натуральном *n* число $\left(4^n + 15n - 1\right)$ делится на 9.

Доказательство:

1 способ:

$$4^n = (3+1)^n = 3^n + C_n^{n-1}\cdot 3^{n-1} + C_n^{n-2}\cdot 3^{n-2} + \ldots + C_n^2\cdot 3^2 + C_n^1\cdot 3^1 + 1$$

$$4^n + 15n - 1 = \left(3^n + C_n^{n-1}\cdot 3^{n-1} + C_n^{n-2}\cdot 3^{n-2} + \ldots + C_n^2\cdot 3^2 + C_n^1\cdot 3^1 + 1\right) + 15n - 1 =$$

$$= 3\cdot\left(3^{n-1} + n\cdot 3^{n-2} + \frac{n(n-1)}{2}\cdot 3^{n-3} + \ldots + \frac{n(n-1)}{2}\cdot 3^1 + 6n\right) =$$

$$= 3\cdot 3\cdot\left(3^{n-2} + n\cdot 3^{n-3} + \frac{n(n-1)}{2}\cdot 3^{n-4} + \ldots + \frac{n(n-1)}{2}\cdot 3^0 + 2n\right) \,\vdots\, 9$$

2 способ:

Начнем рассматривать бином в общем виде:

$$(x+1)^n = x^n + n\cdot x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}\cdot x^{n-2} + \ldots + \frac{n(n-1)}{2}\cdot x^2 + n\cdot x + 1 =$$

$$= x^2\cdot\underbrace{\left(x^{n-2} + n\cdot x^{n-3} + \frac{n(n-1)}{2}\cdot x^{n-4} + \ldots + \frac{n(n-1)}{2}\cdot x^0\right)}_{\text{обозначим выражение в скобках за } A} + n\cdot x + 1 = A\cdot x^2 + n\cdot x + 1$$

Тогда

$$4^n + 15n - 1 = (3+1)^n + 15n - 1 = A\cdot 3^2 + n\cdot 3 + 1 + 15n - 1 = 9A + 18n = 9(A+2n)\ :9$$

К содержанию. Выход.

Спасибо за внимание.