Параметрические критерии проверки однородности средних

Лекция №7
для студентов 2 курса,
обучающихся по специальности 060609 – Медицинская кибернетика

доц. Шапиро Л.А.

Красноярск, 2015 г.

План лекции:

1. **Актуальность темы. Проверка простых гипотез о параметрах.**
2. **Сравнение выборочной средней с гипотетической генеральной средней нормальной совокупности.**
3. **Сравнение двух средних по зависимым выборкам малого объема из нормальных генеральных совокупностей.**
4. **Сравнение генеральных средних двух групп по независимым выборкам из нормальных совокупностей.**

Проверка простых гипотез о параметрах

Сравнение выборочной средней с гипотетической генеральной средней нормальной совокупности.

Алгоритм может быть использован при проверке соответствия теории и эксперимента: в этом случае а-предсказанное теорией значение некоторой величины, выборка x_1, x_2, ..., x_n-результаты экспериментального определения той же величины.

Этим же приемом пользуемся, чтобы показать, что средство или метод измерения не дают систематической погрешности. В этом случае а - действительное значение некоторой величины (свойство стандартного образца или результат измерения заведомо точным прибором, или мировая постоянная), выборка x_1, x_2,..., x_n – ряд результатов, полученных аттестуемым методом (средством) измерения.

1. Дисперсия генеральной совокупности известна.

Генеральная средняя неизвестна, но предполагается равной a_0. Пусть из нормальной генеральной совокупности извлечена выборка объемом n и по ней найдена выборочная средняя $\bar{x}$ причем генеральная дисперсия σ^2 известна. Требуется по выборочной средней проверить нулевую гипотезу H_0: $a=a_0$. Т.к. выборочная средняя является несмещенной оценкой генеральной средней:

$M(\bar{x})=a$, нулевая гипотеза: H_0: $M(\bar{x})= a_0$

т.е. надо установить значимо или незначимо отличаются выборочная и генеральная средняя. В качестве критерия служит величина:

$$U = \frac{(\overline{X} - a_0)}{\sigma(\overline{X})} = \frac{(\overline{X} - a_0)\cdot\sqrt{n}}{\sigma_x}$$

которая распределена нормально, причем M(U)=0, σ (U)=1.

а) H_0: a= a_0 H_1: a≠ a_0

Вычисляем наблюдаемое (эмпирическое) значение критерия:

$$U_{набл} = \frac{(\bar{x} - a_0)\cdot\sqrt{n}}{\sigma}$$

по таблице функции Лапласа найдем критическую точку двусторонней критической области по равенству: $\Phi(u_{кр})=(1-\alpha)/2$

Если $|U_{набл}|<u_{кр}$ нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу

Если $|U_{набл}|>u_{кр}$ нулевую гипотезу отвергают

б) H_0: $a= a_0$ H_1: $a> a_0$

$\Phi(u_{крправ})=(1-2\alpha)/2$

Если $U_{набл}<u_{кр}$ нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу

Если $U_{набл}>u_{кр}$ нулевую гипотезу отвергают

в) H_0: $a= a_0$ H_1: $a< a_0$

Сначала находим $\Phi(u_{крправ})=(1-2\alpha)/2$ $u_{крлев}=- u_{крправ}$

Если $U_{набл}>-u_{кр}$ нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу

Если $U_{набл}<-u_{кр}$ нулевую гипотезу отвергают

Пример1. Из нормальной генеральной совокупности извлечена выборка объемом n=36 и по ней найдена выборочная средняя $\bar{x}$=21,6, σ=0,36. Требуется при уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу H_0: $a=a_0=21$. H_1: $a \neq a_0$

Решение:

$$U_{набл} = \frac{(\bar{x} - a_0) \cdot \sqrt{n}}{\sigma} = \frac{(21,6 - 21) \cdot \sqrt{36}}{0,36} = 10$$

$\Phi(u_{кр})=(1-\alpha)/2=(1-0,05)/2=0,475$. По таблице функции Лапласа найдем $u_{кр}=1,96$

Т.к. $U_{набл}>u_{кр}$ (10>1,96) нулевую гипотезу отвергаем-выборочная и генеральная средняя отличаются значимо

2. Дисперсия генеральной совокупности неизвестна (например, при малых выборках).
В качестве критерия принимают СВ Т, которая имеет распределение Стьюдента с k=n-1 степенями свободы:

$$T = \frac{(\overline{X} - a_0) \cdot \sqrt{n}}{S}$$

а) H_0: $a = a_0$ H_1: $a \neq a_0$

Вычисляем наблюдаемое (эмпирическое) значение критерия:

$$T_{набл} = \frac{(\overline{x} - a_0) \cdot \sqrt{n}}{s}$$

По таблице Стьюдента для уровня значимости α и числа степеней свободы k=n-1 находим двустороннее критическое значение $t_{крдвуст}$

Если $|T_{набл}|<t_{крдвуст}$ нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу

Если $|T_{набл}|>t_{крдвуст}$ нулевую гипотезу отвергают

б) H_0: $a = a_0$ H_1: $a > a_0$

По таблице Стьюдента для уровня значимости $\alpha/2$ и числа степеней свободы $k=n-1$ находим

$t_{крправ}$.

Если $T_{набл}<t_{крправ}$ нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу

в) H_0: $a = a_0$ H_1: $a < a_0$

Находим вспомогательную критическую точку $t_{крправ}$.

$t_{крлев}=-t_{крправ}$

Если $T_{набл}>-t_{крпр}$ нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу

Если $T_{набл}<-t_{крпр}$ нулевую гипотезу отвергают

Пример: По выборке объема n=20, извлеченной из нормальной генеральной совокупности, найдена выборочная средняя $\overline{x}$ =16 и исправленное s=4,5.

При уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу H_0: $a=a_0=15$ при конкурирующей гипотезе:

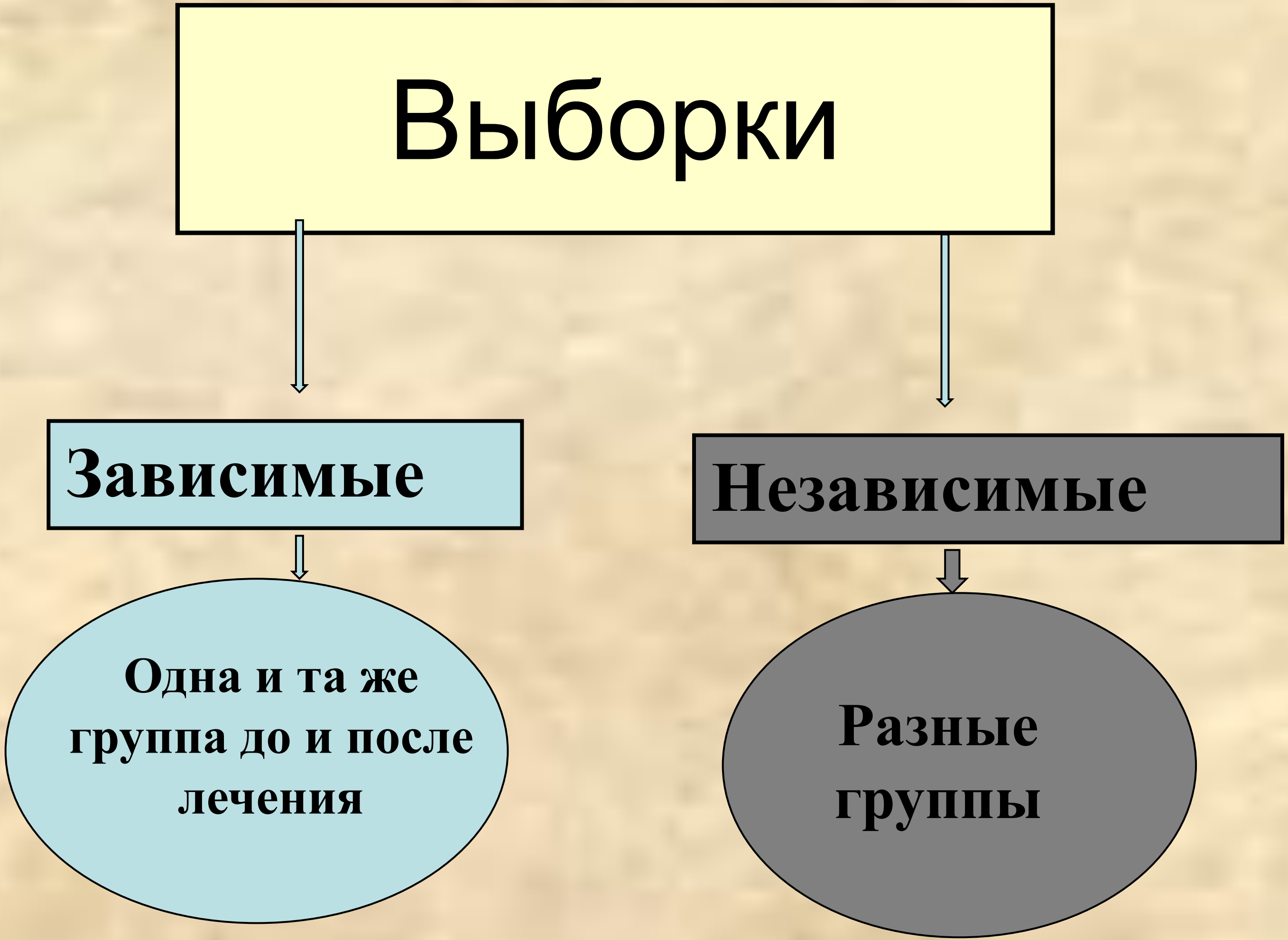
H_1: $a\neq 15$

Решение: Критическая область двусторонняя.

$$T_{набл} = \frac{(\overline{x} - a_0)\cdot\sqrt{n}}{s} = \frac{(16-15)\cdot\sqrt{20}}{4,5} = 0,99$$

$t_{крдвуст}(0,05;19)=2,09$

0,99<2,09 - нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу, выборочная средняя незначимо отличается от гипотетической генеральной средней


Выборки
Зависимые
Независимые
Одна и та же группа до и после лечения
Разные группы

Критерий Стьюдента

- **Для одной выборки**
- **Для двух выборок**
  - **Независимые выборки**
    - **С одинаковыми дисперсиями**
    - **С различными дисперсиями**
  - **Зависимые выборки**

Критерий $t_{набл}$ для определения достоверности средней арифметической одной выборки

$$t_{набл} = \frac{\bar{x} - 0}{s_{\bar{x}}}$$

$t_{набл} < t_{кр}$ (df, α=0,05) выборка однородна

$t_{набл} > t_{кр}$ (df, α=0,05)

выборка не однородна – проверить на выскакивающие результаты

Сравнение двух средних по зависимым выборкам малого объема из нормальных генеральных совокупностей (разностный метод)

- Исследовалось изменение частоты сердечных сокращений студентов до и после экзамена

N	$ЧСС_{до}$	$ЧСС_{после}$
1	90	60
2	80	70
3	70	70
4	90	70
5	100	70
$\bar{X} =$ 6	110	80
	90	70

1. Найдем среднее арифметическое значение выборки:

$$\bar{x}_{до} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_6}{n} =$$

$$= \frac{90 + 70 + 80 + 90 + 100 + 110}{6} = 90$$

2. Вычислим дисперсию (рассеивание ряда)

$$D(x) = s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}$$

где df = n-1

число степеней свободы

$$D(x) = \frac{(90-90)^2 + (80-90)^2 + \ldots + (110-90)^2}{5} = 200$$

3. Среднее квадратическое отклонение выборки:

$$s = \sqrt{D} = \sqrt{200} = 14{,}1$$

Это **- точечные** (т.е. выраженные одним значением) параметры малой выборки.

Результат записывается в виде:

$$\bar{x} \pm s = 90 \pm 14{,}1(уд/мин)$$

4. Определим среднюю квадратическую ошибку:

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{14{,}1}{\sqrt{6}} = 5{,}8$$

5. Определим доверительный интервал для генеральной средней.

По таблицам Стьюдента находим t для доверительной вероятности 0,95 и числа степеней свободы df=n-1=5: **t=2,57,**

следовательно:

μ=90±2,57 · 5,8=90±15 уд/мин

или 75≤ μ ≤105 уд/мин

- **Для второго ряда измерений:**

$$\overline{x}_{после} = \frac{60 + 70 + ... + 80}{6} = 70$$

$$D(x) = \frac{(70-60)^2 + (70-70)^2 + ... + (80-70)^2}{5} = 40$$

$$s = \sqrt{40 =} 6{,}3$$

$$s_{\bar{x}} = \frac{6{,}3}{\sqrt{6}} = 2{,}58$$

Нулевая гипотеза:

В генеральной совокупности нет различия между средними арифметическими выборок

Проверяем гипотезу по критерию Стьюдента t при уровне значимости α=0,05.

1. Определяем $t_{набл}$:

$$t_{набл} = \frac{|d|}{s_d}$$

где d-среднее значение разности пульса до и после экзамена

s_d-стандартная ошибка разности

Нулевая гипотеза:

2. Определяем критическое значение критерия Стьюдента ($t_{кр}$)для α=0,05 и df=n-1

- Если $t_{набл} \geq t_{кр}$ нулевая гипотеза отвергается, различие средних статистически значимо
- Если $t_{набл} < t_{кр}$, нулевая гипотеза принимается, различие средних статистически не значимо

N	$ЧСС_{до}$	$ЧСС_{после}$	d	$(d\text{-}dcp)^2$
1	90	60	-30	100
2	80	70	-10	100
3	70	70	0	400
4	90	70	-20	0
5	100	70	-30	100
6	110	80	-30	100
	90	70	$d_{ср}=-20$	D=160

Для разности:

$$\overline{d} = \frac{(-30)+) - (-10) + ... + (-30)}{6} = -20$$

$$D(x) = \frac{(-30 - (-20)^2 + ... + (-30 - (-20)^2}{5} = 160$$

$$s = \sqrt{160 =} 12,65$$

$$s_d = \frac{12,65}{\sqrt{6}} = 5,16$$

- Определим, достоверно ли определена средняя арифметическая разности:

$$t_{набл} = \frac{|d|}{s_d} = \frac{20}{5,16} = 3,87$$

$t_{кр}(0,05;5)=2,57$ $t_{набл} > t_{кр}$

Это означает, что нулевая гипотеза отвергается, снижение ЧСС статистически значимо

Группа	ЧСС $(\overline{X} \pm S)$ уд/мин	
	До экзамена	После экзамена
МК201 (n=6)	90±14,1	70 ±6,3*

Примечание:*-значимость различий α<0,05

Рассчитаем эффект:

$$\Delta = \frac{(70-90)}{90} * 100\% = -22\%$$

ЧСС студентов после экзамена снизилась на 22% (α<0,05)

двух групп по независимым выборкам из нормальных совокупностей.

Допущения:

- В генеральной совокупности выборки распределены по нормальному закону
- Дисперсии независимых выборок однородны (критерий Фишера)

$$F = \frac{D_1}{D_2}$$

- **Нормированное отклонение:**

$$t_{набл} = \frac{\left|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\right|}{s_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}} = \frac{d}{s_d}$$

1. Для n≥30, ошибка разницы s_d определяется по формуле:

$$t_{набл} = \frac{\left|\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right|}{\sqrt{S_{x1}^2 + S_{x2}^2}}$$

Пример: n_1=40 n_2=50

$$\bar{x}_1 = 150 \quad \bar{x}_2 = 140 \quad s_{\bar{x}_1} = 20 \quad s_{\bar{x}_2} = 30$$

Определить значимость различий при α=0,05

$t_{набл} = \frac{d}{s_d} = \frac{150-140}{\sqrt{20^2+30^2}}$ =0,277

$t_{крит}$ (0,05)=1,96, $t_{набл} < t_{крит.}$

Разница средних арифметических недостоверна.

2. Для n<30, ошибка разницы s_d определяется по формуле:

$$s_d = \sqrt{\frac{\sum(x_{1i}-\bar{x}_1)^2+\sum\left(x_{2i}-\bar{x}_2\right)^2}{(n_1-1)+(n_2-1)} \cdot \frac{n_1+n_2}{n_1 \cdot n_2}}$$

Сравним изменение частоты сердечных сокращений студентов МК201 и МК202 группы до экзамена

МК201	МК202	ΔX_1	$(\Delta X_1)^2$	ΔX_2	$(\Delta X_2)^2$
90	100	0	0	0	0
80	120	-10	100	20	400
70	90	-20	400	-10	100
90	70	0	0	-30	900
100	90	10	100	-10	100
110	110	20	400	10	100
	120			20	400
$\overline{X}_1$	$\overline{X}_2$	$\Sigma=$	**1000**		**2000**
90	100	$D_1=$	1000/5= 200	$D_2=$	2000/6 =333

$$F_{набл} = \frac{333}{200} = 1{,}67$$

$F_{крит}(6,5,0{,}05)=4{,}95$

$1{,}67<4{,}95$ дисперсии однородны.

$$S_d = \sqrt{\frac{(1000+2000)\cdot 13}{(5+6)\cdot 42}} = 9{,}2$$

$$t_{набл} = \frac{10}{9{,}2} = 1{,}1$$

$df=(n_1-1)+(n_2-1)=11$

$t_{кр}=2{,}2$

$t_{набл} < t_{кр}$, нулевая гипотеза не отвергается, различие средних арифметических статистически не значимо, выборки принадлежат одной генеральной совокупности

Показатель $(\bar{X} \pm S)$	Группа	
	МК201	МК202
ЧСС (уд/мин)	**90±14,1 (6)**	**100 ±18,3 (7)**

Сводка основных формул

Средняя арифметическая выборки

$$\mathbf{\overline{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i}{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \ldots + \mathbf{x}_n}{\mathbf{n}}$$

Дисперсия

$$D(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n-1}$$

Среднее квадратическое отклонение

$$s = \sqrt{D(x)}$$

Средняя квадратическая ошибка:

$$s_{\overline{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Критерий нормированного отклонения (по Стьюденту)

$$t = \frac{\bar{x} - a}{s_{\bar{x}}}$$

Доверительный интервал для генеральной средней

$$t_{\alpha,n} \cdot S_{\bar{x}}$$

Критерий $t_{набл}$ для определения достоверности средней арифметической одной выборки

$$t_{набл} = \frac{\bar{x}}{s_{\bar{x}}}$$

- **Критерий $t_{эксп}$ разности средних арифметических двух выборок**

а) n≥30

$$t_{экспер} = \frac{\left|\overline{X_1} - \overline{X_2}\right|}{\sqrt{S_{x1}^2 + S_{x2}^2}}$$

б) *n<30*

$$t_{экспер} = \frac{\left|\overline{X_1} - \overline{X_2}\right|}{\sqrt{\frac{\sum (X_{1i} - \overline{X_1})^2 + (X_{2i} - \overline{X_2})^2}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1)} \cdot \frac{n_1 + n_2}{n_1 \cdot n_2}}}$$

Заключение

Нами рассмотрены критерии проверки однородности средних по выборкам из нормальных совокупностей.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА:

Основная литература:

- **Попов А.М. Теория вероятней и математическая статистика /А.М. Попов, В.Н. Сотников. – М.: ЮРАЙТ, 2011. – 440 с.**
- **Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие / В.Е. Гмурман. – М. : Высш. шк., 2011. – 479 с.**
- **Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В.Е. Гмурман. – М. : Высш. шк., 2011. – 404 с.**
- **Балдин К. В. Основы теории вероятностей и математической статистики : учебник / К. В. Балдин. – М. : Флинта, 2010. – 488с.**

Учебно–методические пособия:

- **Шапиро Л.А., Шилина Н.Г. Руководство к практическим занятиям по медицинской и биологической статистике Красноярск: ООО «Поликом». – 2003.**

БЛАГОДАРЮ ЗА ВНИМАНИЕ