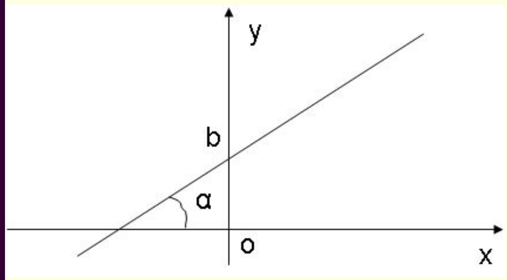
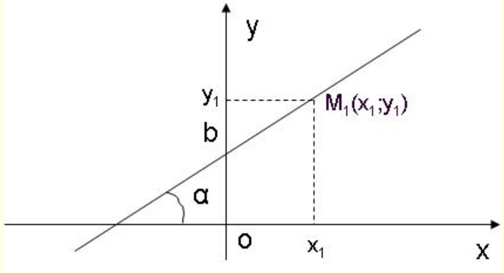
$y=kx+b$

Различные виды уравнения прямой на плоскости

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1},$$

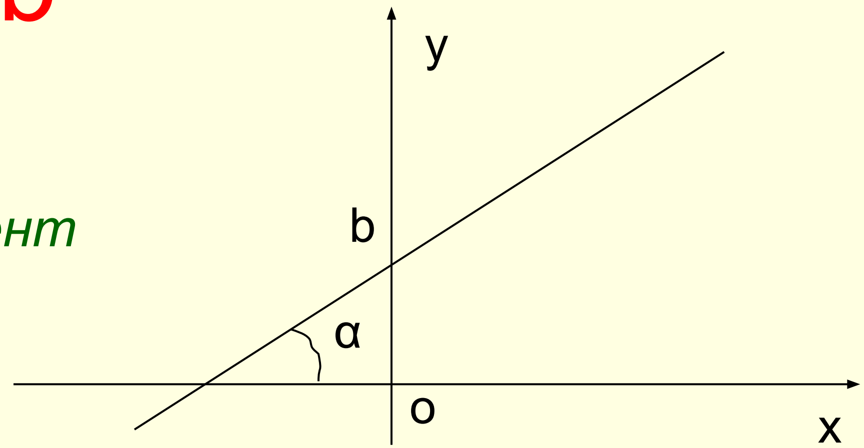




$$y-y_1=k\left(x-x_1\right)$$

1. Уравнение прямой с угловым коэффициентом:

- $y=kx+b$
- k- *угловой коэффициент прямой*



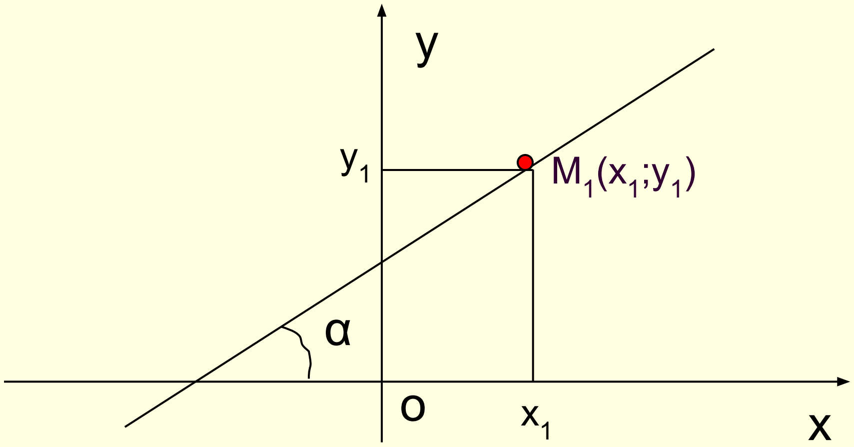
$$k = tg\alpha$$

α - угол наклона прямой к оси Ох, где

$0 \le \alpha < \pi \quad \alpha \ne \pi/2$

b - ордината точки пересечения прямой с осью Оу

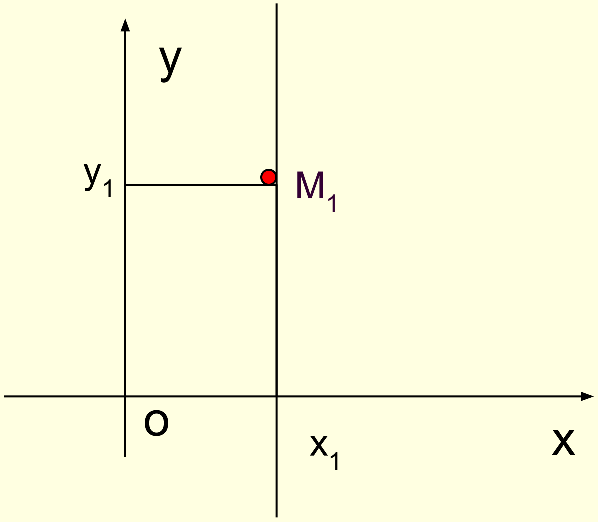
Уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(x_1;y_1)$ с заданным угловым коэффициентом k, при $\alpha \neq \pi/2$



$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

Уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(x_1; y_1)$, но не имеющей углового коэффициента, при $\alpha = \pi/2$

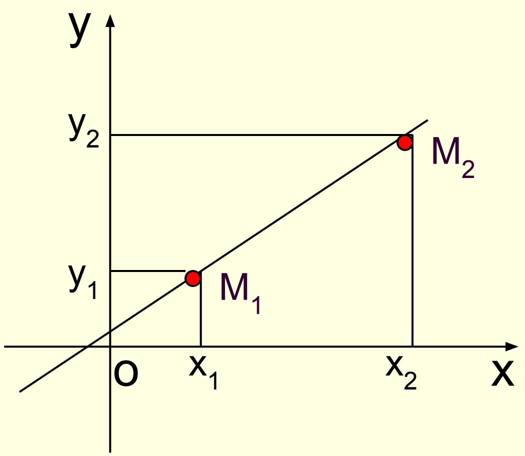
$X = X_1$



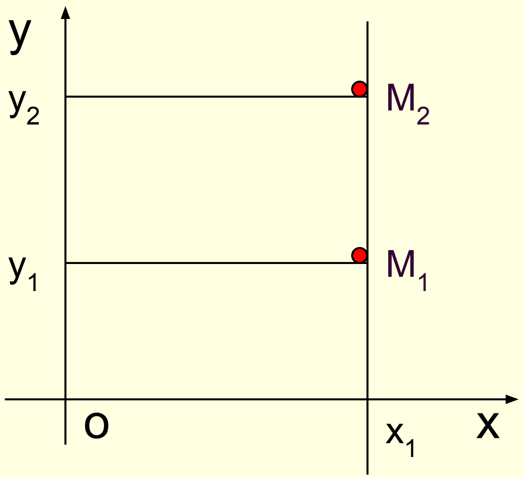
Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1},$$

если $x_1 \neq x_2$ и $y_1 \neq y_2$

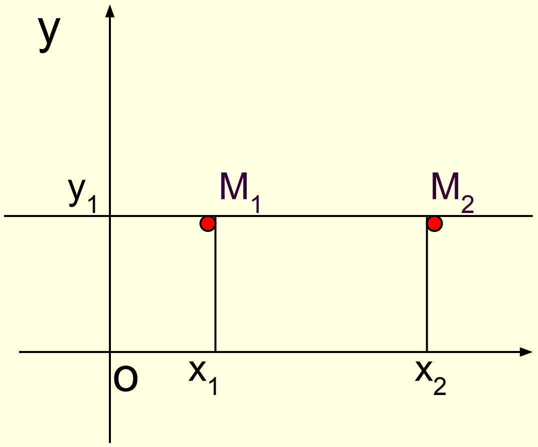


$x = x_1$, если $x_1 = x_2$, но $y_1 \neq y_2$



Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$

$$y = y_1, \text{ если } \; x_1 \neq x_2, \text{ но } \; y_1 = y_2$$



Общее уравнение прямой на плоскости:

- Ax+By+C=0, *где* A,B,C – *числа* $A^2 + B^2 \neq 0$
- Если A=0 B≠0 уравнение прямой принимает вид: $y=y_1$, прямая параллельна оси *Ox*, угловой коэффициент равен 0;
- Если A≠0 B=0 уравнение прямой принимает вид: $x=x_1$, прямая параллельна оси *Oy*, углового коэффициента не имеет;
- Если A=0 B=0, то уравнение прямой принимает вид:
- y=kx+b, где: k=A / B

ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Угловой коэффициент прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad x_1 \neq x_2$$

П
Р
И
Л
О
Ж
Е
Н
И
Я

2. Острый угол φ между прямыми, заданными уравнениями

- $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$

вычисляется по формуле:

$$tg\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}\right|$$

ПРИЛОЖЕНИЯ

3. Точка пересечения прямых, заданных общими уравнениями

- $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$, находится как решение системы:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases}$$

ПРИЛОЖЕНИЯ

4. Координаты x_0, y_0 середины отрезка M_1, M_2 между точками $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$

$$x_0 = \frac{x_2 + x_1}{2}, \quad y_0 = \frac{y_2 + y_1}{2}.$$

П
Р
И
Л
О
Ж
Е
Н
И
Я

5. Расстояние $|M_1M_2|$ между точками $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

П
Р
И
Л
О
Ж
Е
Н
И
Я

6. Необходимое и достаточное условие параллельности двух прямых

- *Необходимое и достаточное условие параллельности* двух прямых, имеющих угловые коэффициенты k_1 и k_2 :

$$k_1=k_2$$

ПРИЛОЖЕНИЯ

7. Необходимое и достаточное условие перпендикулярности двух прямых

- Необходимое и достаточное условие перпендикулярности двух прямых, имеющих угловые коэффициенты k_1 и k_2 :

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

Примеры:

- **П р и м е р 1.** Дано общее уравнение прямой:

$$2x-3y+12=0$$

- Найти угловой коэффициент прямой.
- *Р е ш е н и е.* Решим уравнение относительно y получим уравнение прямой с угловым коэффициентом:

$$3y=2x+12 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{2}{3}x+4$$

- Отсюда заключаем: $k = 2/3$ - угловой коэффициент прямой.
- *О т в е т:* 2/3

Примеры:

- **П р и м е р 2.** *Составить уравнение прямой, проходящей через точку A(-1;3) и составляющей с осью Ox угол 135^o*.
- *Р е ш е н и е*. Так как в данном случае $k=tg135^o=-1$ и $x_1=-1$, $y_1=3$, то уравнение прямой будет иметь вид: $y-3=-1(x+1)$
- Отсюда получаем: $y = -x+2$ – искомое уравнение прямой.
- *О т в е т:* $y = -x+2$

Примеры:

- **П р и м е р 3.** Составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых:

$$x + y - 1 = 0 \qquad 2x + 3y + 4 = 0$$

- параллельно прямой:

$$3x - y + 7 = 0$$

- *Р е ш е н и е.* а) Найдем точку пересечения двух прямых, для этого, решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 2x + 3y + 4 = 0, \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{matrix} x = 7 \\ y = -6 \end{matrix}$$

- Следовательно, искомая точка пересечения – *M_1(7;-6)*
- б) Составим уравнение прямой, проходящей через данную точку *M_1(7;-6)* параллельно прямой:

$$3x - y + 7 = 0$$

Примеры:

- Найдем угловой коэффициент k_1 прямой: $3x = y + 7 \equiv 0$

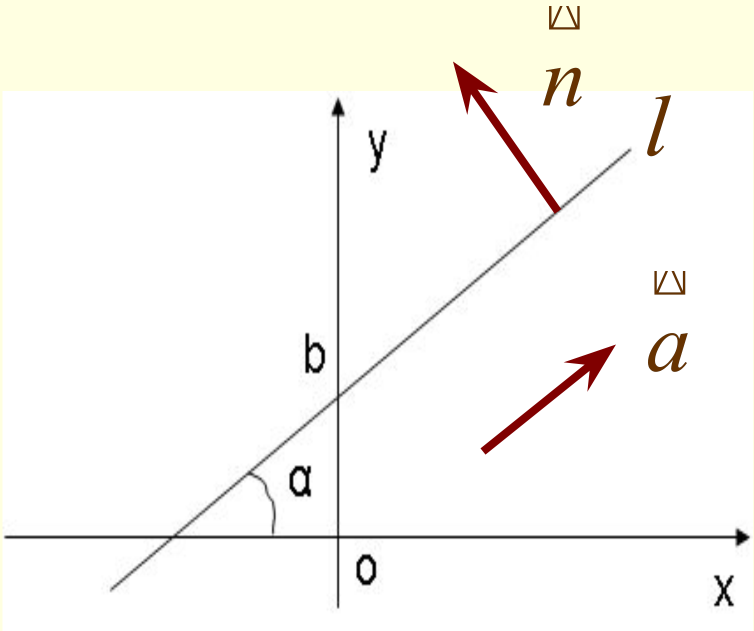
$$y = 3x + 7 \Rightarrow k_1 = 3$$

- Из условия параллельности двух прямых находим угловой коэффициент искомой прямой: $k_1 = k_2 = 3$
- Пользуясь формулой: $y - y_1 = k\left(x - x_1\right)$, находим уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(7;-6)$ с угловым коэффициентом $k_2=3$:

$$y + 6 = 3\left(x - 7\right) \quad \Rightarrow \quad 3x - y - 27 = 0.$$

- *О т в е т:* $3x - y - 27 = 0.$

Нормальный вектор прямой



Если вектор $\vec{n}$ перпендикулярен направляющему вектору $\vec{a}$ прямой l , то он называется ***нормальным вектором прямой*** l .

Прямая задана общим уравнением

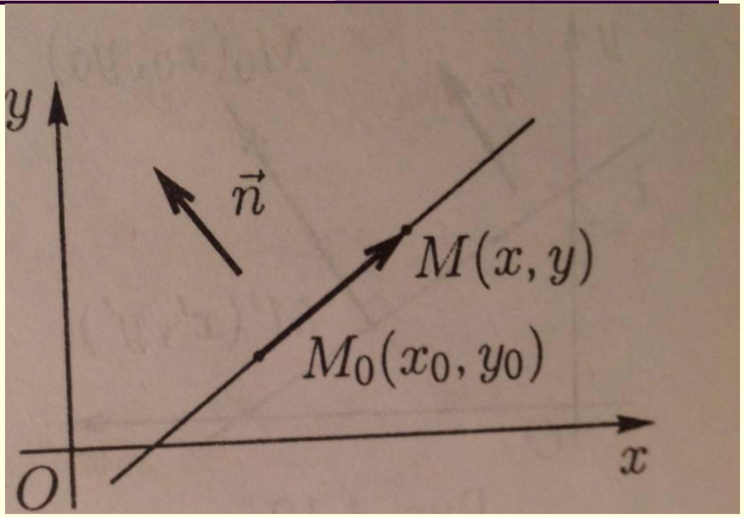
$$Ax + By + C = 0,$$

Тогда вектор $\vec{n} = \left(A, B\right)$ является нормальным вектором этой прямой.

З А Д А Ч А

Нормальный вектор прямой

Найти уравнение прямой l, которая проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$ и имеет нормальный вектор $\vec{n} = (A, B)$.



Решение. Векторы $\overrightarrow{MM_0} = (x - x_0, y - y_0)$, $\vec{n}$ перпендикулярны, их скалярное произведение равно нулю: $\left(\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M}\right) = 0$. $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$.

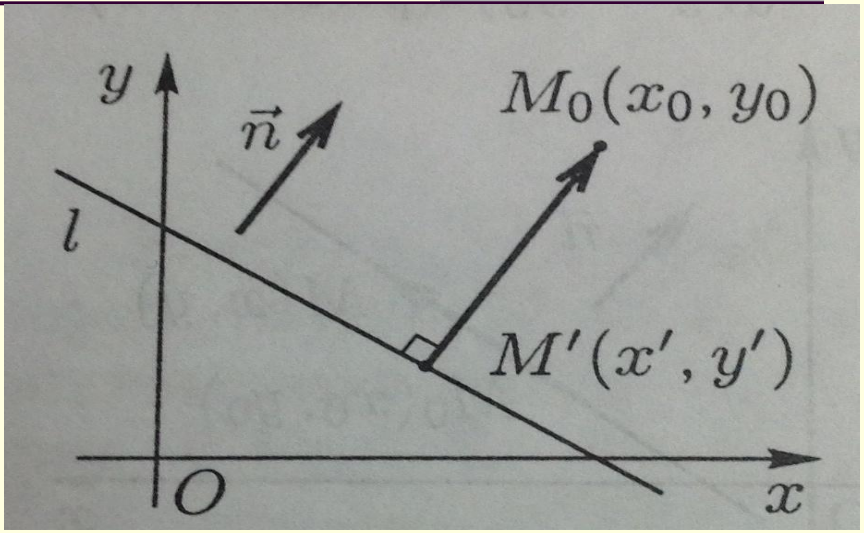
Это и есть искомое уравнение.

Расстояние от точки до прямой

Теорема. Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой, заданной общим уравнением

$$Ax + By + C = 0,$$

вычисляется формулой



$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

З

А

Д

А

Ч

А

Расстояние от точки до прямой

Найти расстояние от точки $M_0(1,5)$ до прямой, заданной общим уравнением $3x-4y-3=0$

Решение.

$$d=\frac{\left|Ax_0+By_0+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

$$d=\frac{\left|3\cdot 1-4\cdot 5-3\right|}{\sqrt{3^2+4^2}}=4.$$

Ответ: 4.

О
К
Р
У
Ж
Н
О
С
Т
Ь

Кривые второго порядка

ОКРУЖНОСТЬ

Определение 1. *Окружность* – геометрическое место точек на плоскости, равноудаленных от некоторой точки, называемой центром.

Каноническое уравнение: $x^2 + y^2 = r^2.$ (1)

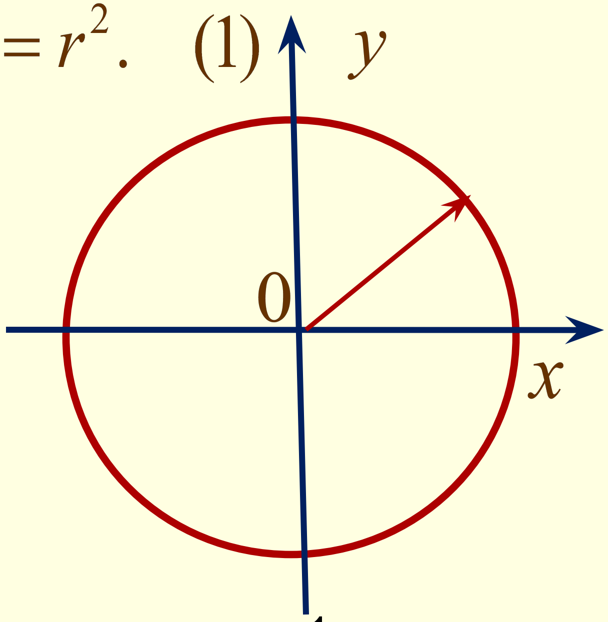


рис.1.

Свойства:

1. Точка О(0;0) – центр окружности;
2. r - радиус;
3. Ox, Oy - оси симметрии;
4. График изображен на рис.1.

ОКРУЖНОСТЬ

Кривые второго порядка

Окружность, задаваемая уравнением

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2. \quad (2)$$

обладает свойствами:

1.Точка $O_1(x_1, y_1)$ − центр окружности;

2. *r* − радиус;

3. Прямые $x = x_0, y = y_0$ − оси симметрии;

4. График окружности (2) изображен на рис.2 и получается из окружности с уравнением (1) параллельным переносом на вектор $\overrightarrow{OO_1}$.

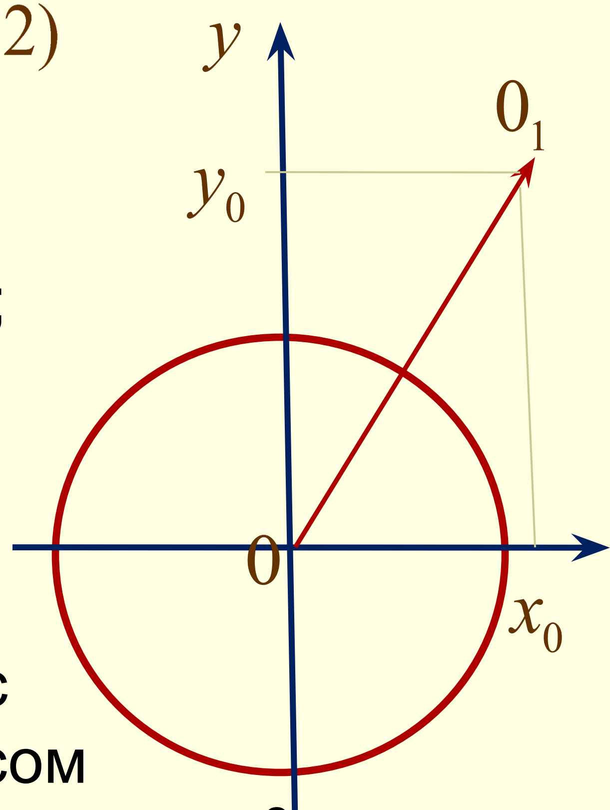


рис.2.

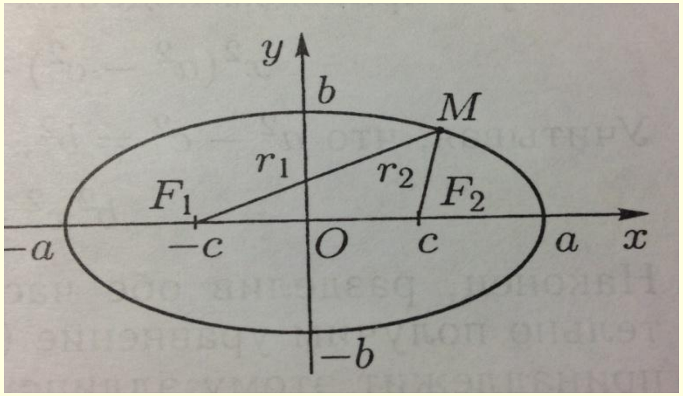
Э
л
л
и
п
с

Кривые второго порядка

Определение. Эллипс – геометрическое место точек на плоскости, для каждой из которых сумма расстояний до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная.

Эллипс – геометрическое место точек на плоскости, координаты которых в некоторой прямоугольной системе координат *Oxy* удовлетворяет уравнению

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (a\neq b) \quad (1)$$



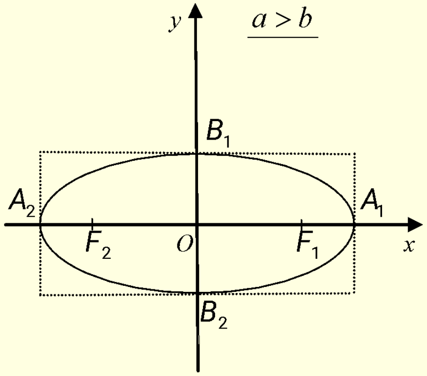
При $a=b$ уравнение (1) является уравнением окружности радиуса a с центром в начале координат.

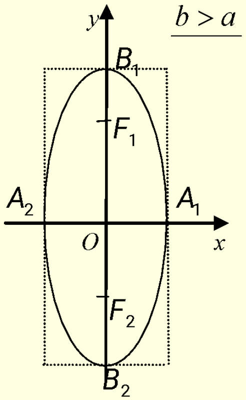
Кривые второго порядка

Э л л и п с

- ***Свойства***:
- 1. Центр эллипса − точка O(0;0);
- 2. Вершины эллипса − точки $A_1(a;0),\ A_2(-a;0),\ B_1(0;b),\ B_2(0;-b)$
- 3. $|A_1A_2| = 2a,\ |B_1B_2| = 2b$ − оси эллипса;
- 4. a, b -− полуоси эллипса;
- 5. Оси симметрии − *Ox, Oy;*
- 6. Фокусы эллипса – точки, $F_1(c;0),\ F_2(-c;0),$ где $c=\sqrt{a^2-b^2},$ если $a>b;$

$F_1(0;c),\ F_2(0;-c),$ где $c=\sqrt{b^2-a^2},$ если $a<b;$





Э
л
л
и
п
с

Кривые второго порядка

Эллипс, задаваемый уравнением обладает свойствами: $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1, a \neq b$

Центр эллипса – точка $O_1(x_0; y_0)$;

2. Вершины эллипса – точки

$$A_1(x_0+a; y_0),\ A_2(x_0-a; y_0),\ B_1(x_0; y_0+b),\ B_2(x_0; y_0-b);$$

3. $|A_1A_2|=2a,\ |B_1B_2|=2b$ – оси эллипса;

4. a, b – полуоси эллипса;

5. Оси симметрии – прямые $x=x_0,\ y=y_0$;

6. Фокусы эллипса – точки

$F_1(x_0+c; y_0),\ F_2(x_0-c; y_0)$, где $c=\sqrt{a^2-b^2}$, если $a>b$;

$F_1(x_0; y_0+c),\ F_2(x_0; y_0-c)$, где $c=\sqrt{b^2-a^2}$, если $b>a$;

Кривые второго порядка

Г
И
П
Е
Р
Б
О
Л
А

- ***Определение.*** *Гипербола* – геометрическое место точек на плоскости, для каждой из которых модуль разности расстояний до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная.

- ***Каноническое уравнение:***

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a) \quad \text{или} \quad \frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1. \quad (б)$$

ГИПЕРБОЛА

Кривые второго порядка

- **Свойства:**

1. Вершины:

$$A_1(a;0),\ A_2(-a;0)$$ – для гиперболы (а);

$$B_1(0;b),\ B_2(0;-b)$$ – для гиперболы (б);

2. Полуоси: a – действительная, b – мнимая – для гиперболы (а);

a – мнимая, b – действительная – для гиперболы (б);

3. Фокусы гиперболы: точки

$$F_1\left(\sqrt{a^2+b^2};0\right),\ F_2\left(-\sqrt{a^2+b^2};0\right)$$ – для гиперболы (а),

$$F_1\left(0;\sqrt{a^2+b^2}\right),\ F_2\left(0;-\sqrt{a^2+b^2}\right)$$ – для гиперболы (б);

Кривые второго порядка

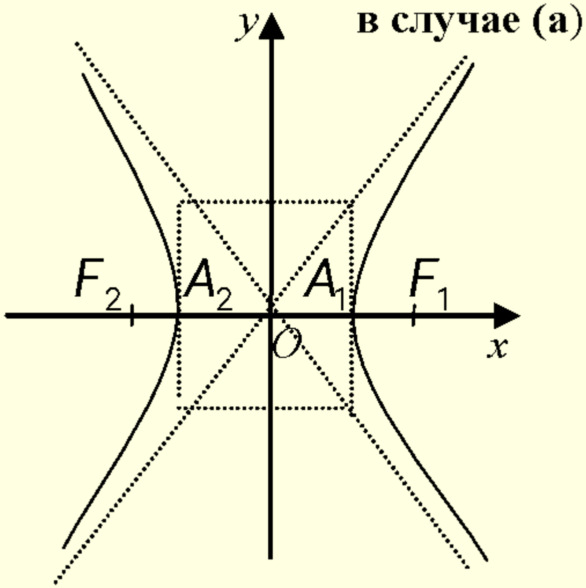
ГИПЕРБОЛА

- **Свойства:**

4. Оси симметрии $-Ox, Oy$.

5. Асимптоты: прямые $y = \frac{b}{a}x$ и $y = -\frac{b}{a}x$;

6. График изображен на рис. 4.



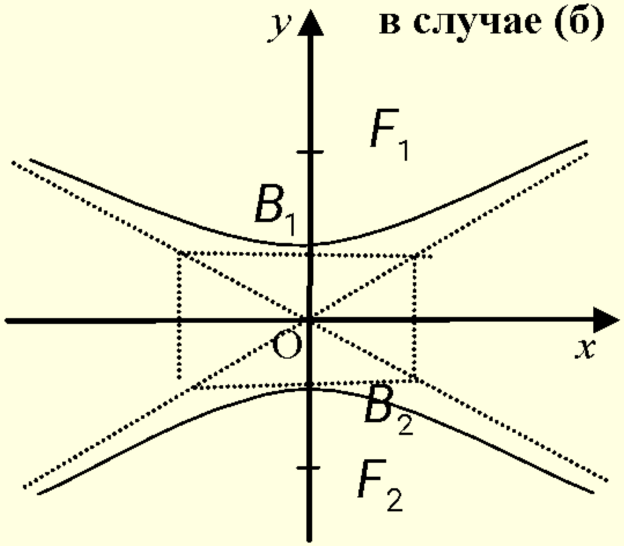


Рис.4

Кривые второго порядка

ГИПЕРБОЛА

- ***Гиперболы, задаваемые уравнениями:***

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1 \qquad \frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}=1$$

Вершины:

$A_1(x_0+a;\, y_0),\ A_2(x_0-a;\, y_0)$ – для гиперболы (а);

$B_1(x_0;\, y_0+b),\ B_2(x_0;\, y_0-b)$ – для гиперболы (б);

2. Полуоси: a – действительная, b – мнимая – для гиперболы (а);

a – мнимая, b – действительная – для гиперболы (б);

3. Фокусы гиперболы: точки

$F_1\left(x_0+\sqrt{a^2+b^2};\, y_0\right),\ F_2\left(x_0-\sqrt{a^2+b^2};\, y_0\right)$ – для (а),

$F_1\left(x_0;\, y_0+\sqrt{a^2+b^2}\right),\ F_2\left(x_0;\, y_0-\sqrt{a^2+b^2}\right)$ – для (б);

4. Оси симметрии: прямые $x=x_0$, $y=y_0$.

5. Асимптоты:

прямые $y=y_0+\frac{b}{a}(x-x_0)$ и

Кривые второго порядка

ПАРАБОЛА

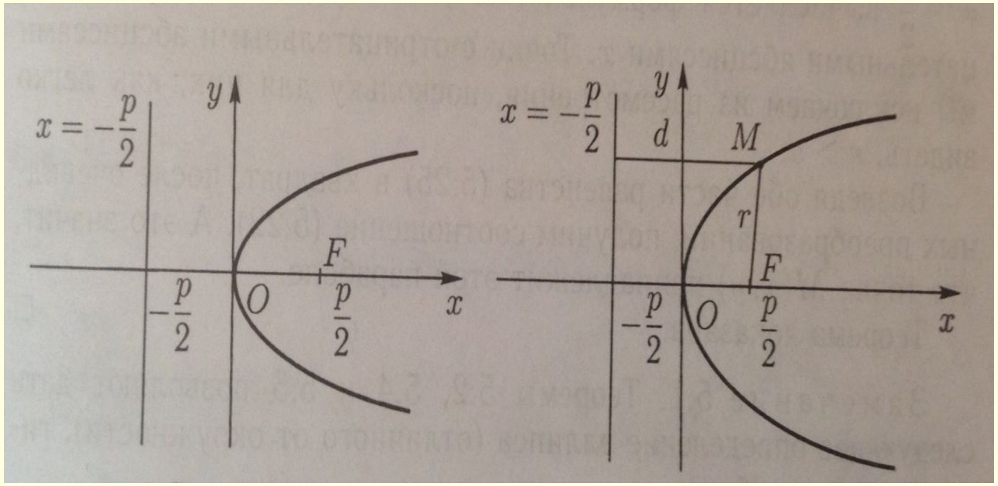
Определение. *Парабола* – геометрическое место точек на плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой.

Каноническое уравнение:

$y^2 = 2px$ или $x^2 = 2py$

где $p > 0$ некоторое число, называемое *параметром параболы.*

Ось абсцисс *Ox является осью симметрии параболы.*



П
А
Р
А
Б
О
Л
А

Кривые второго порядка

Свойства:

1. Вершина: O(0;0);
2. Фокусы параболы: $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ или $F\left(0;\frac{p}{2}\right)$
3. Директриса: $x=-\frac{p}{2}$ или $y=-\frac{p}{2}$

Параболы, задаваемые уравнениями $\left(y-y_0\right)^2=2p\left(x-x_0\right)$

или $\left(x-x_0\right)^2=2p\left(y-y_0\right)$,

где p некоторое число, называемое *<u>параметром параболы</u>*,

обладают свойствами:

Кривые второго порядка

П
А
Р
А
Б
О
Л
А

1. **Вершина:** точка $O_1(x_0; y_0)$
2. **Фокусы параболы:** $F\left(x_0 + \frac{p}{2}; y_0\right)$ **или** $F\left(x_0; \frac{p}{2} + y_0\right)$
3. **Директриса:** $x = x_0 - \frac{p}{2}$ или $y = y_0 - \frac{p}{2}$
4. **Оси симметрии:** $y = y_0$ или $x = x_0$.

Кривые второго порядка

П
А
Р
А
Б
О
Л
А

Уравнение второй степени $Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \quad (*)$

где числа ***A*** и ***C*** не равны одновременно нулю, преобразуется к каноническому виду методом выделения полных квадратов и последующим параллельным переносом.

Тип кривой определяется числами A и C:

1) Если $A = C$, то $(*)$ – окружность;
2) если $A \neq C$ и $A \cdot C > 0$ то $(*)$ – эллипс;
3) если $A \cdot C < 0$, то $(*)$ – гипербола;
4) если одно из чисел *A* или *C* равно нулю, то – $(*)$ парабола.