Системы линейных алгебраических уравнений:

совместность(теорема Кронекера – Каппели), число решений, решение методом Гаусса

Системы любого числа линейных алгебраических уравнений

- **Определение 1.** *Системой линейных алгебраических уравнений*, состоящей из m уравнений с n неизвестными $x_1, \ldots, x_n$, называется система вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (1)$$

Системы любого числа линейных алгебраических уравнений

- где $a_{11}, \ldots, a_{mn}$, $b_1, \ldots, b_m$ некоторые числа. Если $b_1=0, \ldots, b_m=0$, то система называется *линейной однородной*. В противном случае система (1) называется *линейной неоднородной системой.*

- ***З а м е ч а н и е 1.*** *Система (1) может быть записана в векторной форме:*

$$A \cdot \overline{x} = \overline{b}, \qquad (2)$$

Системы любого числа линейных алгебраических уравнений

- где $\overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – вектор–столбец неизвестных,

$\overline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ – вектор–столбец свободных членов,

Системы любого числа линейных алгебраических уравнений

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ – матрица системы.

- **О п р е д е л е н и е 2.** *Расширенной матрицей* системы (1) называется матрица, обозначаемая $(A\,|\,\bar{b})$ и полученная приписыванием к матрице A справа после вертикальной черты столбца $\bar{b}$.

Системы любого числа линейных алгебраических уравнений

$$(A\,|\,\overline{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & & b_1 \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} & & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ldots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & & b_n \end{array}\right)$$

- **О п р е д е л е н и е 3.** *Решением* системы (2) называется любой n- мерный вектор $\overline{x}$ подстановка которого в (2) дает тождество.

Системы любого числа линейных алгебраических уравнений

- **О п р е д е л е н и е 4.** Система называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение. В противном случае система называется *несовместной*.
- **Т е о р е м а 1.** (*Кронекера – Капелли*). Система (1) совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы, то есть:

$$r(A) = r\left(A \middle| \bar{b}\right).$$

- При этом если $r(A) = n$, то система имеет единственное решение; если $r(A) < n$, то система имеет бесконечное множество решений (n –число неизвестных).

Системы любого числа линейных алгебраических уравнений

- **Т е о р е м а 2.** Решение системы $A \cdot \overline{x} = \overline{b}$ (2) имеет вид:

$$\overline{x} = \overline{x}_0 + c_1 \overline{l_1} + \dots + c_k \overline{l_k}, \qquad (3)$$

где $\overline{x}_0$ – частное решение линейной неоднородной системы (2); число k, называемое числом свободных неизвестных системы (2), вычисляется по формуле $k = n - r(A)$

$c_1, \dots, c_k$ – произвольные постоянные числа; $\overline{l_1}, \dots, \overline{l_k}$ – постоянные n- мерные векторы, являющиеся линейно независимыми решениями соответствующей линейной однородной системы $A \cdot \overline{x} = \overline{0}$.

Системы любого числа линейных алгебраических уравнений

Метод Гаусса

- Для решения системы (2) с матрицей A размерности $m x n$ и столбцом свободных членов $\overline{b}$ нужно выполнить следующие действия:

  1) Составить расширенную матрицу $\left(A|\overline{b}\right)$ и привести ее к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований строк;

  2) Если $r(A) \neq r\left(A|\overline{b}\right)$, записать ответ: система несовместна.

  Если $r(A) = r\left(A|\overline{b}\right)$, сделать выводы:

Системы любого числа линейных алгебраических уравнений

- система совместна,
- базисными неизвестными объявить те, номера которых совпадут с номерами базисных столбцов ступенчатого вида матрицы A, содержащих опорные элементы этой матрицы; остальные неизвестные объявить свободными,
- число свободных неизвестных равно $k = n - r(A)$,
- перейти к выполнению следующего шага;

Системы любого числа линейных алгебраических уравнений

3) Привести ступенчатую матрицу, полученную при выполнении шага 1), к виду Гаусса;

4) Написать систему линейных уравнений, соответствующую матрице, построенной на шаге 3), обозначив свободные неизвестные $c_1, \ldots, c_k$;

5) Выразить из полученной системы базисные неизвестные через свободные неизвестные;

6) Записать ответ, воспользовавшись или векторной формой записи (5), или координатной формой:

$$x_j = f_j(c_1, \ldots c_k), \quad j = 1, \ldots n.$$

Системы любого числа линейных алгебраических уравнений

- **З а м е ч а н и е 2.** Применение метода Гаусса не требует, чтобы матрица системы A была квадратной и предварительного вычисления ее определителя.

ПРИМЕРЫ

- **<u>Пример 1</u>.** Для системы:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 5 \\ x - y + 5z = 3 \\ 4x + 7z = 7 \end{cases}$$

указать матрицу системы A и столбец свободных членов $\overline{b}$ Записать систему в векторной форме.

<u>Решение.</u> Обозначим столбец неизвестных :

ПРИМЕРЫ

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Тогда матрица A рассматриваемой системы составляется из числовых коэффициентов, стоящих в системе при неизвестных:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \\ 4 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

ПРИМЕРЫ

- Столбец $\bar{b}$ составляется из свободных членов системы:

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Поэтому систему можно переписать в векторной форме:

$$A \cdot \bar{x} = \bar{b}$$

О т в е т: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \\ 4 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ $\bar{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ $A \cdot \bar{x} = \bar{b}$

ПРИМЕРЫ

- **Пример 2.** Исследовать на совместность систему:

$$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ 3x - y = 1 \\ 4x - y + 2z = 1. \end{cases}$$

Решение.

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ПРИМЕРЫ

- Выполним шаг 1) метода Гаусса:

$$\left(A\middle|\bar{b}\right)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 1\\ 3 & -1 & 0 & 1\\ 4 & -1 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{matrix}(-3)(-4)\\ \\ \\ \end{matrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 1\\ 0 & -1 & -6 & -2\\ 0 & -1 & -6 & -3\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ (-1)\\ \\ \end{matrix}\to$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 2 & 1\\ 0 & -1 & -6 & -2\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{array}\right).$$

Следовательно:

$r(A)=2,\ r\left(A\middle|\bar{b}\right)=3$ и $r(A)\neq r\left(A\middle|\bar{b}\right).$

О т в е т: система несовместна.

ПРИМЕРЫ

- **П р и м е р 3.** Решить систему:

$$\begin{cases} x+2z=1 \\ 3x-y=1 \\ 4x-y+3z=1. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. В данном случае имеем:

$$\overline{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \overline{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} -$$

столбец свободных членов.

ПРИМЕРЫ

$$\left(A\,\bar{b}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 2 & 1\\ 3 & -1 & 0 & 1\\ 4 & -1 & 3 & 1\end{array}\right)(-3)(-4)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 2 & 1\\ 0 & -1 & -6 & -2\\ 0 & -1 & -5 & -3\end{array}\right)(-1)\rightarrow$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 2 & 1\\ 0 & -1 & -6 & -2\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{array}\right)(6)(-2)\rightarrow\left[\begin{array}{c} r(A)=r\left(A\,\bar{b}\right)=3,\\ n=3,\\ \text{система совместна,}\\ \text{решение единственное}\end{array}\right]\rightarrow$$

ПРИМЕРЫ

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 3\\ 0 & -1 & 0 & -8\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{array}\right)(-1)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 0 & 8\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{array}\right)\Rightarrow\begin{cases}x=3,\\ y=8,\\ z=-1.\end{cases}$$

О т в е т: $x=3; \quad y=8; \quad z=-1.$

ПРИМЕРЫ

- **П р и м е р 4.** Исследовать на совместность и решить систему:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 0 \\ -x_1 + 7x_2 + 11x_3 + 3x_4 + 8x_5 = 1 \\ -2x_1 + 4x_2 + 6x_3 - 4x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

ПРИМЕРЫ

- Р е ш е н и е. Воспользуемся методом Гаусса: составим матрицу A рассматриваемой системы, столбец свободных членов $\bar{b}$ и преобразуем расширенную матрицу $\left(A\middle|\bar{b}\right)$ к виду Гаусса:

$$\begin{array}{c}\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -2 & 4 & 0 \\ -1 & 7 & 11 & 3 & 8 & 1 \\ -2 & 4 & 6 & -4 & 1 & 0 \end{array}\right)\end{array}\begin{array}{l}(1)(2)\\ \\ \\ \\ \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 8 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & 10 & 16 & 10 & 8 & 2 \\ 0 & 10 & 16 & 10 & 1 & 2 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ (-2)\\ \\ \\ \end{array} \rightarrow$$

ПРИМЕРЫ

$$\to\left(\begin{array}{ccccc|c}1&3&5&7&0&1\\0&5&8&5&4&1\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&-7&0\end{array}\right)\begin{array}{c}\\\\\\(-1/7)\end{array}\to\left(\begin{array}{ccccc|c}1&3&5&7&0&1\\0&5&8&5&4&1\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0\end{array}\right)\to$$

$$\to\left(\begin{array}{ccccc|c}1&3&5&7&0&1\\0&5&8&5&4&1\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)\begin{array}{c}\\\\(-4)\\\\\end{array}\to$$

$r(A)=r(A\ \bar{b})=3,\quad n=5$

$\Rightarrow$ система имеет бесконечное множество решений;

$n-r=2$ – число свободных неизвестных;

$x_1,\ x_2,\ x_5$ – базисные неизвестные;

$x_3,\ x_4$ – свободные неизвестные

$\to$

ПРИМЕРЫ

$$\to\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 8 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)\left(\frac{1}{5}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 8/5 & 1 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)(-3) \to$$

$$\to\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1/5 & 4 & 0 & 2/5 \\ 0 & 1 & 8/5 & 1 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

ПРИМЕРЫ

- О т в е т:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{2}{5} - \dfrac{1}{5}c_1 - 4c_2 \\ x_2 = \dfrac{1}{5} - \dfrac{8}{5}c_1 - c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \\ x_5 = 0 \\ c_1,\ c_2 - \text{произв. пост.} \end{cases}$$

или

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 2/5 \\ 1/5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -1/5 \\ -8/5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$