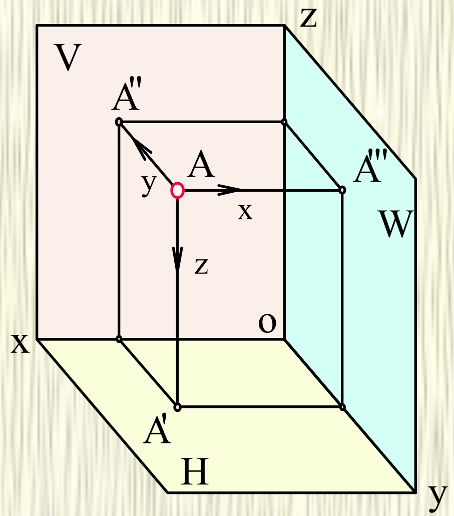
НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Пересечение плоскостей

Слайд-фильм



2013 г.

3.5.1. Прямая линия, пересекающая плоскость

Поставлена задача:

Определить точку К пересечения данной прямой а с плоскостью α.
Определить видимость прямой.

Решение задачи выполняется в три этапа.

Алгоритм решения задачи

1. Заключить данную прямую во вспомогательную плоскость-посредник (проецирующую или уровня)

   $a \subset \Sigma(\Sigma')$

2. Построить линию пересечения вспомогательной плоскости-посредника с заданной

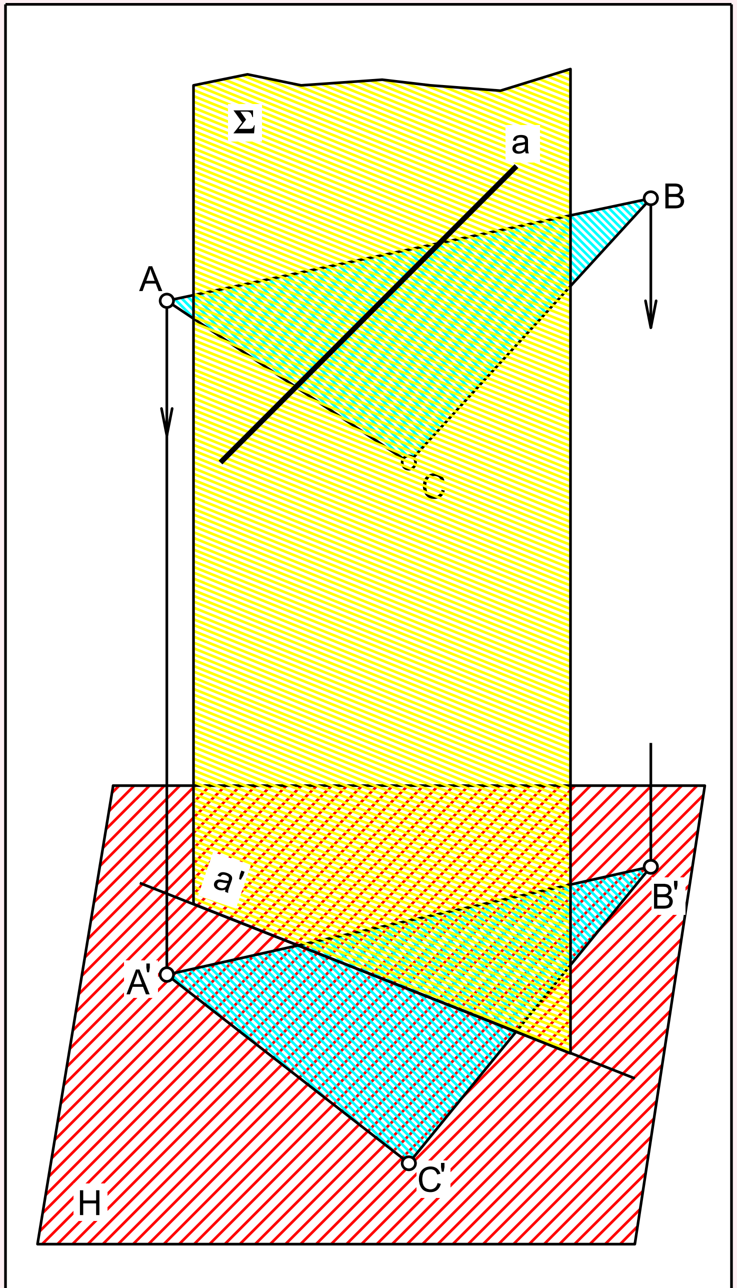
   $m = \Sigma \cap \alpha(ABC)$

3. Найти точку пересечения полученной линии пересечения с заданной прямой

   $K = m \cap a$

Символическая запись алгоритма

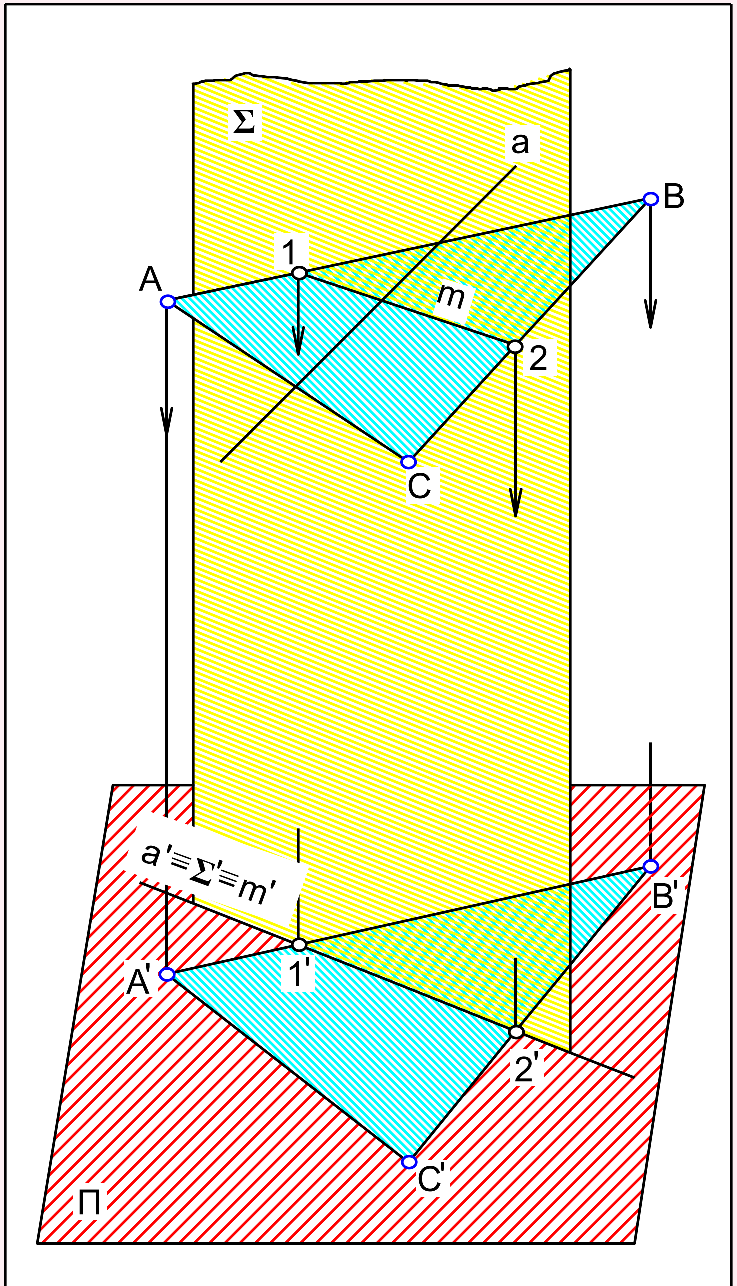
Определить видимость прямой **а** по правилу конкурирующих точек



Геометрические образы (пл. ABC, прямая a) спроецированы на плоскость П.

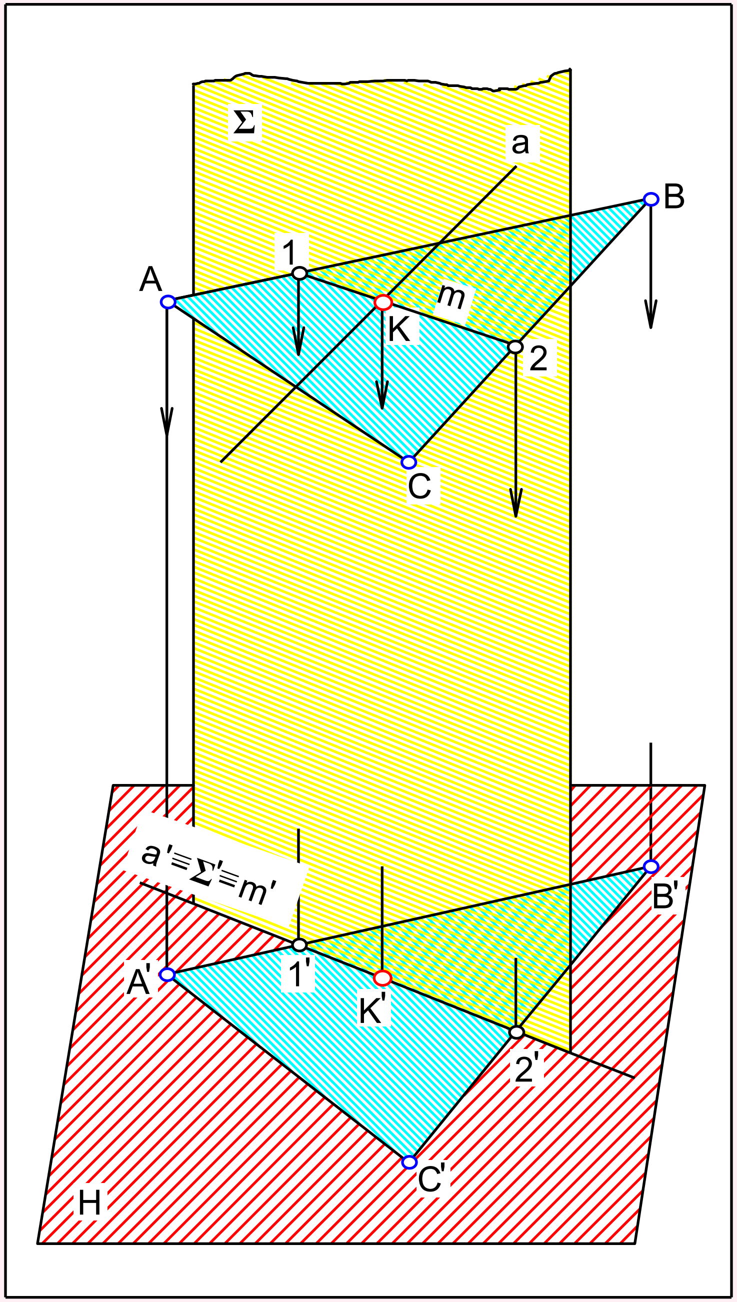
А теперь посмотрите как выполняются эти этапы алгоритма на пространственном рисунке и при проецировании всех элементов задачи на плоскости П.

Выполняем 1-й этап алгоритма $a \subset \Sigma(\Sigma')$



Выполняем 2-й этап алгоритма

$$m=\Sigma\cap\alpha(ABC)$$



Выполняем 3-й этап алгоритма

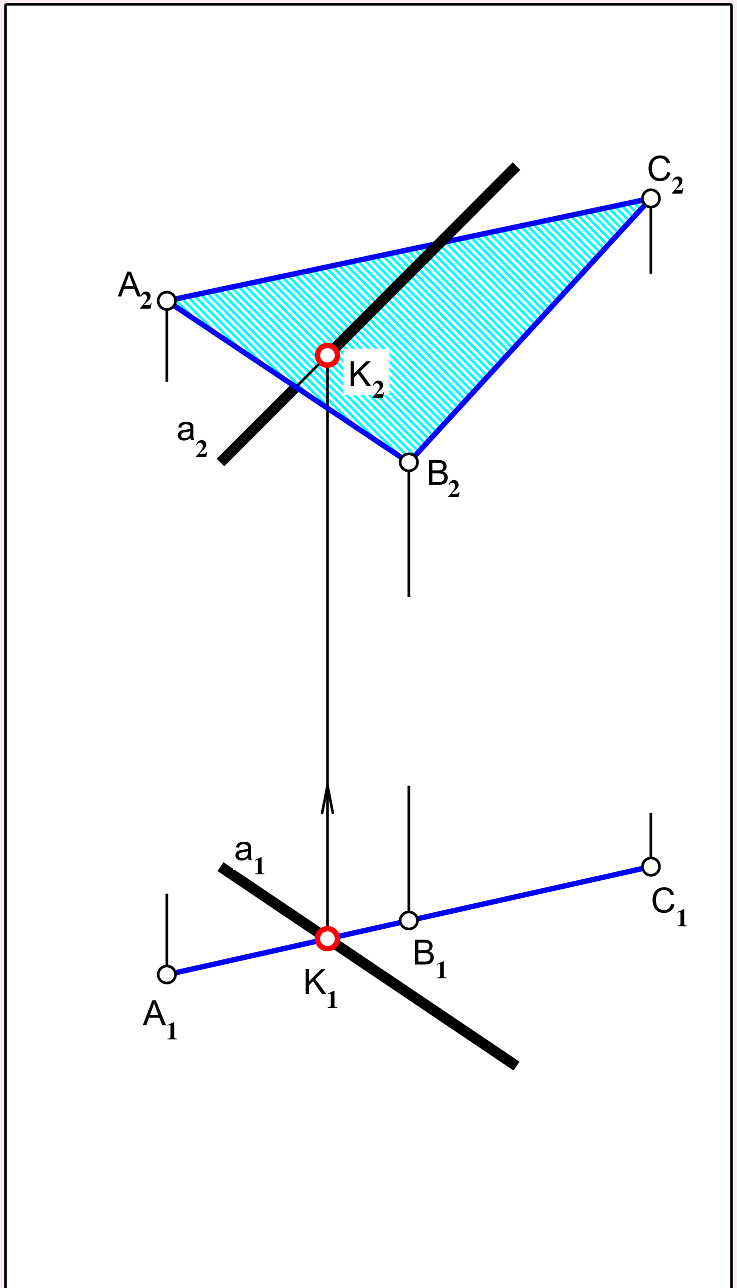
$$K = m \cap a$$

Точка К - искомая точка пересечения данной прямой а с плоскостью АВС.

Рассмотрим применение данного алгоритма при решении задачи на построение точки К пересечения прямой а с плоскостью α. Возможны три варианта условия данной задачи:

- прямая а - общего положения, плоскость α - проецирующая (или уровня);
- прямая а - проецирующая, плоскость α - общего положения;
- прямая а - общего положения, плоскость α - общего положения.

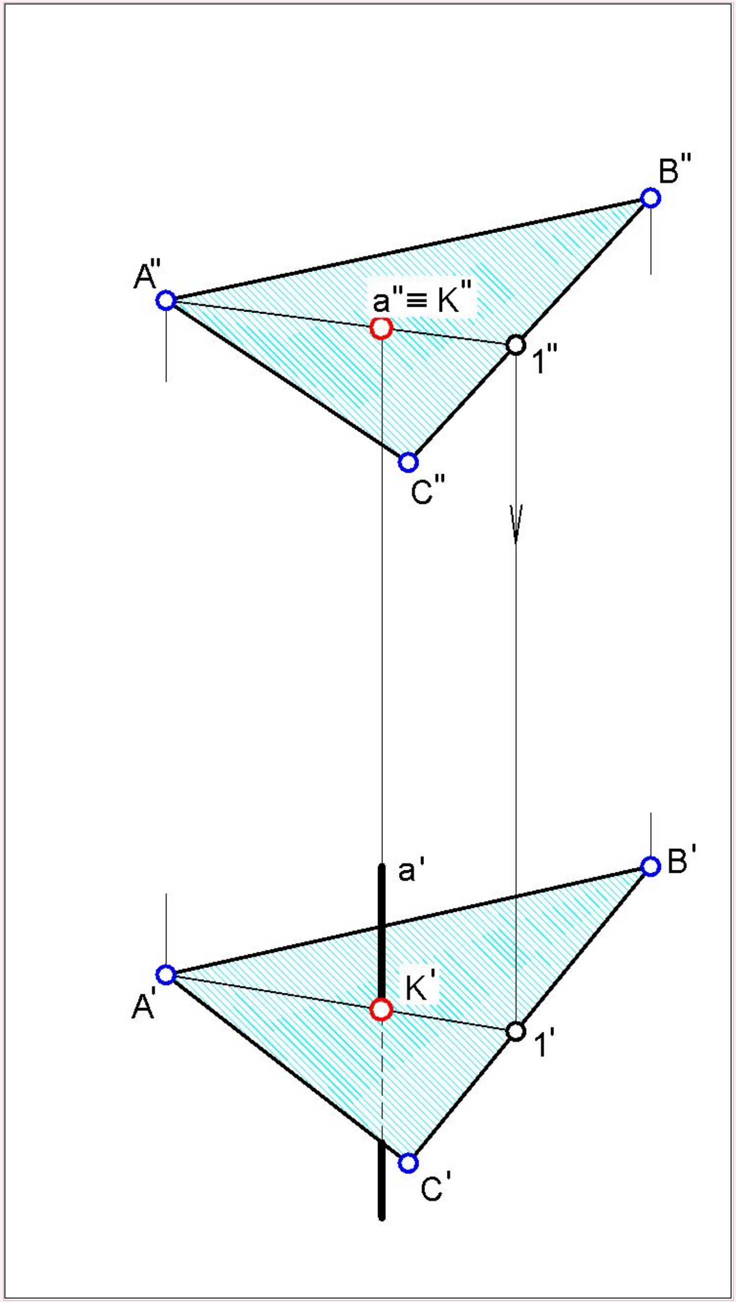
Решение первых двух задач можно выполнить, не применяя алгоритма, так как один из заданных образов частного положения.



В первом случае плоскость α (ABC) - ***горизонтально проецирующая***.

Поэтому горизонтальная проекция К$_1$ искомой точки К определяется как точка пересечения линейной проекции A'B'C' плоскости α с гориoнтальной проекцией a$_1$ данной прямой a.

Фронтальная проекция К$_2$ точки К строится из условия принадлежности точки К прямой a.

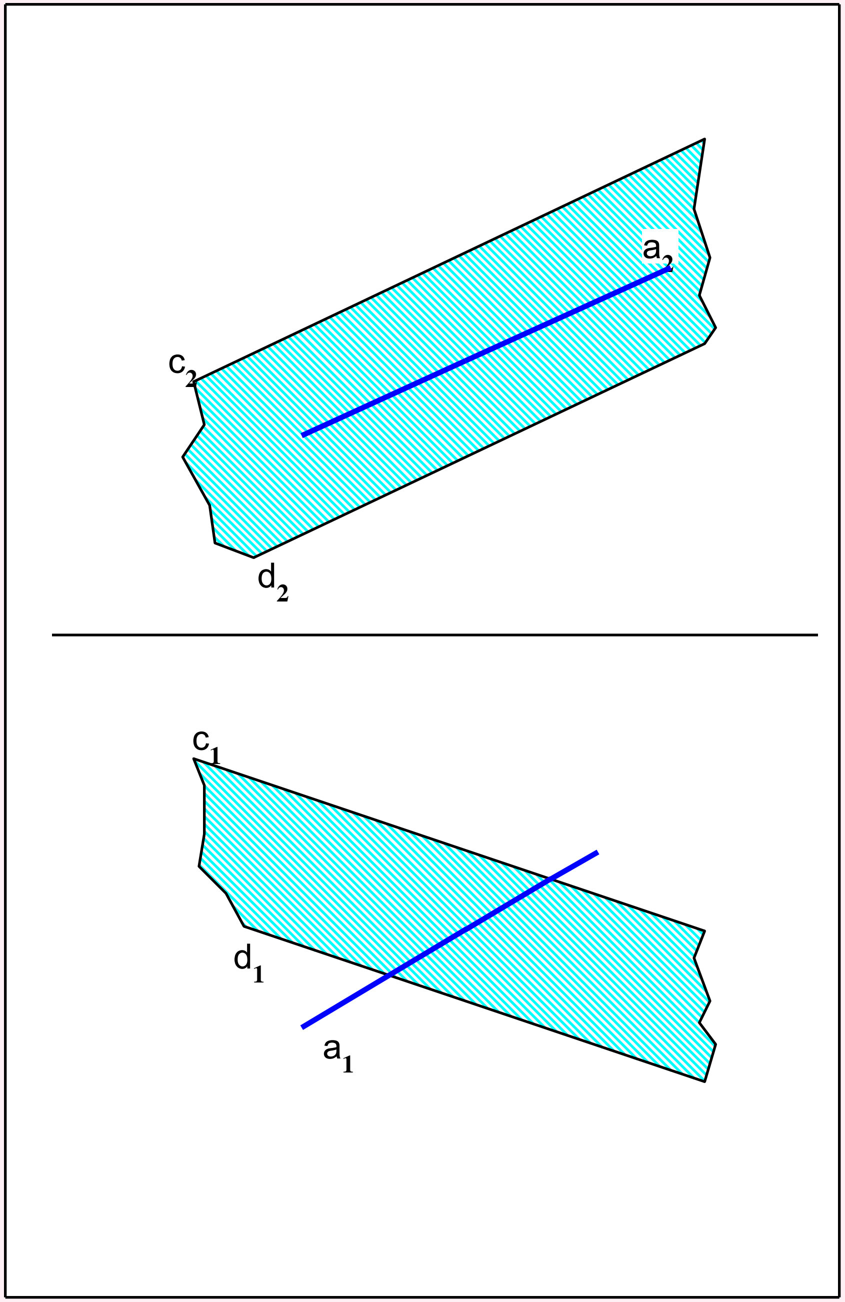


Во втором случае прямая а - ***фронтально-проецирующая***.

Поэтому фронтальные проекции любой ее точки, а также и искомой К пересечения а с плоскостью α (АВС), совпадает с ее вырож-денной проекцией а" ≡ К".

Построение горизонтальной проекции К' точки К выполняется из условия принад-лежности точки К плоскости α: точка К принадлежит плоскости α, так как она принадлежит ее прямой А1 (К' находится как точка пересечения прямой А' 1' с прямой а').

Видимость прямой а в этих задачах решает-ся просто - с помощью реконструкции данных образов (по наглядности).

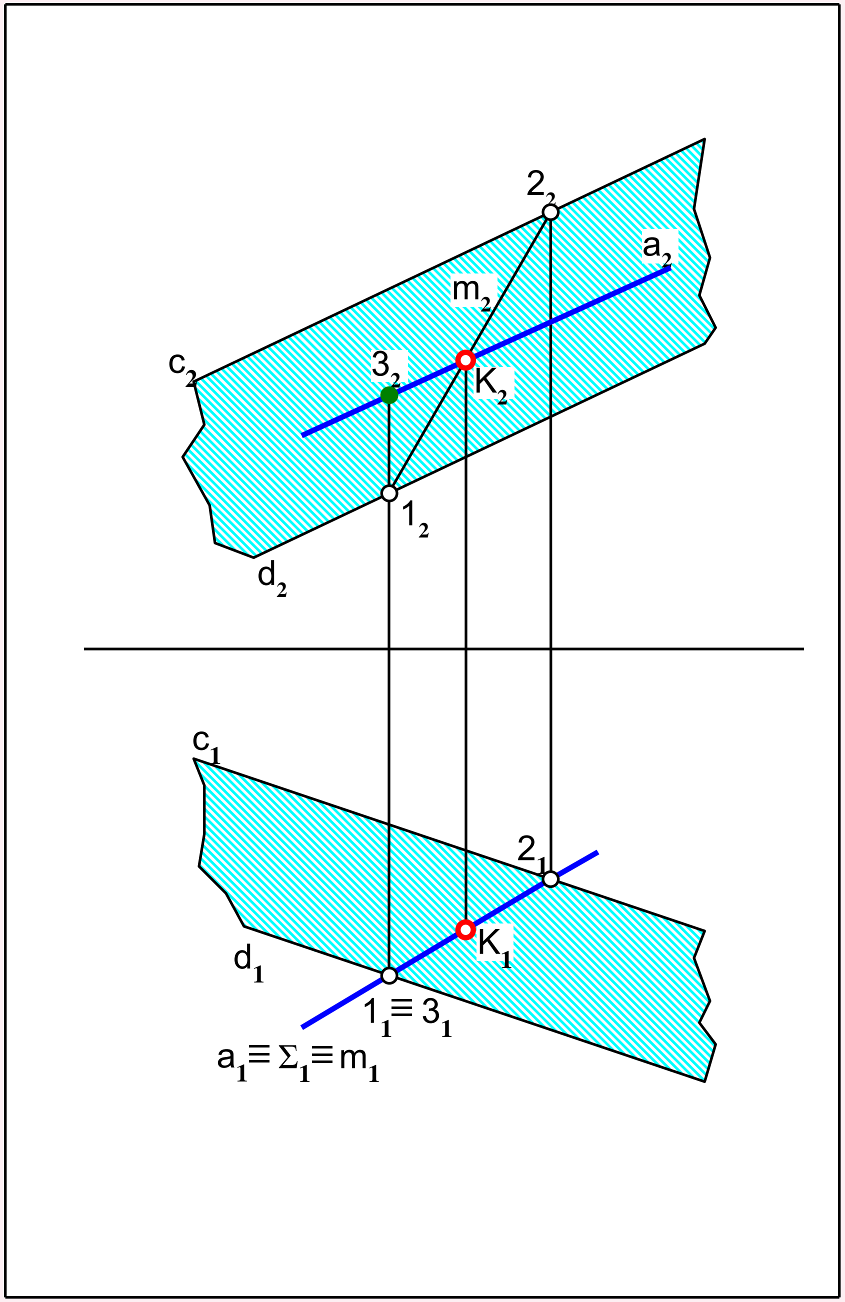


В третьем, общем, случае построение искомой точки К пересечения прямой а с плоскостью α (c//d) выполнено по описанному алгоритму.

1) прямую а заключают во вспомогательную горизонтально проецирующую плоскость-посредник $\Sigma(\Sigma_1)$;

2) строят прямую m пересечения плоскостей α (c//d) и $\Sigma(\Sigma_1)$. На чертеже это отразится записью $(a_1 \equiv \Sigma_1 \equiv m_1)$. Фронтальную проекцию m_2 строят из условия ее принадлежности данной плоскости α(m и α имеют общие точки 1 и 2);

3) находят точку K_2, как результат пересечения a_2 с m_2, а K_1 строят по принадлежности прямой m_1. Точка $K(K_2, K_1)$ - искомая точка пересечения прямой а с плоскостью α (c//d).



Задачу заканчивают определением видимости прямой по правилу конкурирующих точек. Так, на плоскости **Н** видимость определена с помощью горизонтально конкурирующих точек **1** и 3($1_1 \equiv 3_1$), где точка 1 принадлежит плоскости α а точка 3 - прямой a. Точка 3 расположена над точкой 1, поэтому точка 3 и прямая a в этом участке на плоскости $П_1$ будет видима.

На фронтальной плоскости видимость может быть определена или с помощью пары фронтально-конкурирующих точек, или по реконструкции данных образов (при восходящей плоскости видимость одинаковая на плоскостях $П_1$ и $П_2$).

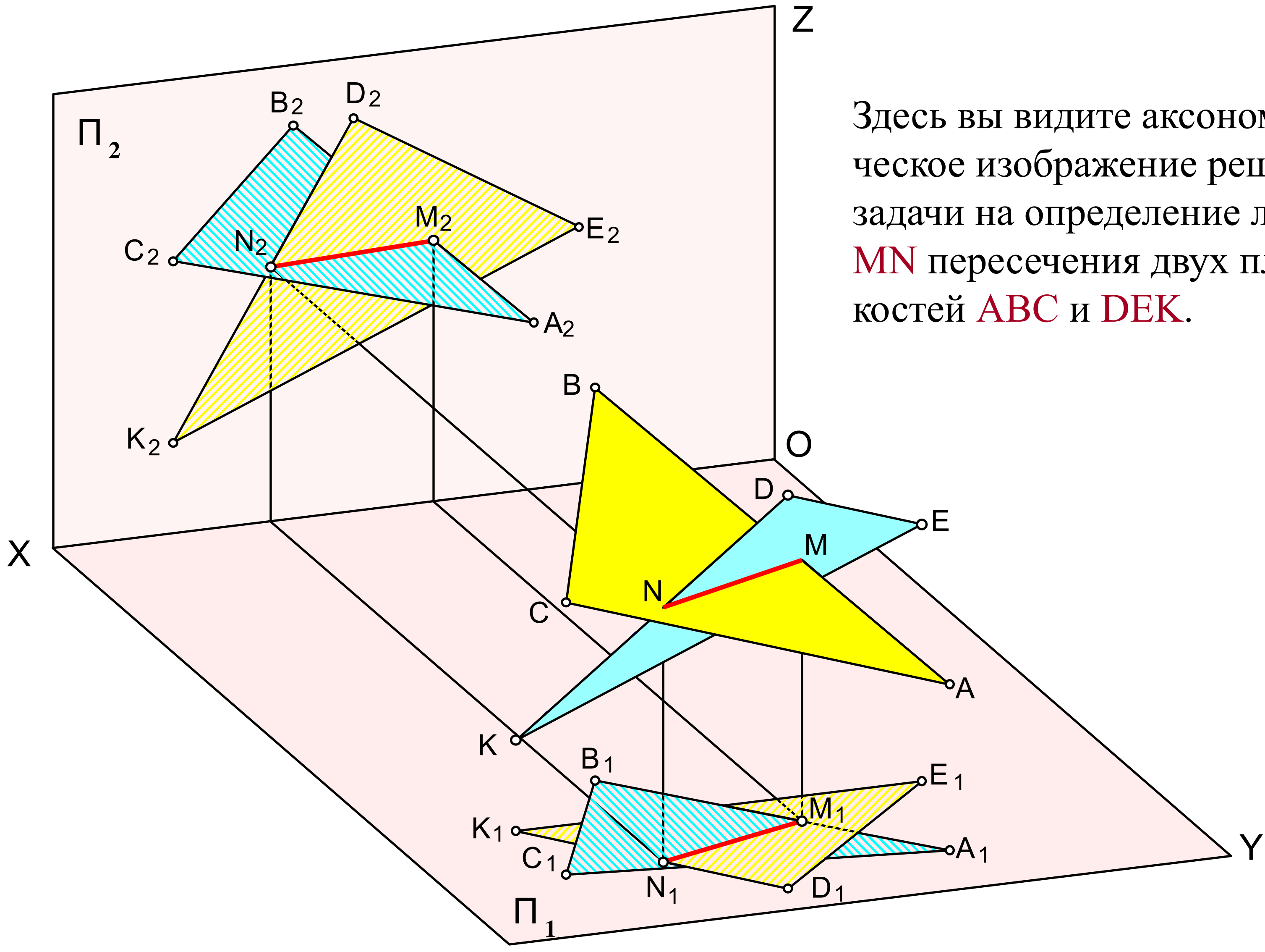
Данная задача после определения видимости прямой a имеет вид данного рисунка.

Определение линии пересечения двух плоскостей общего положения

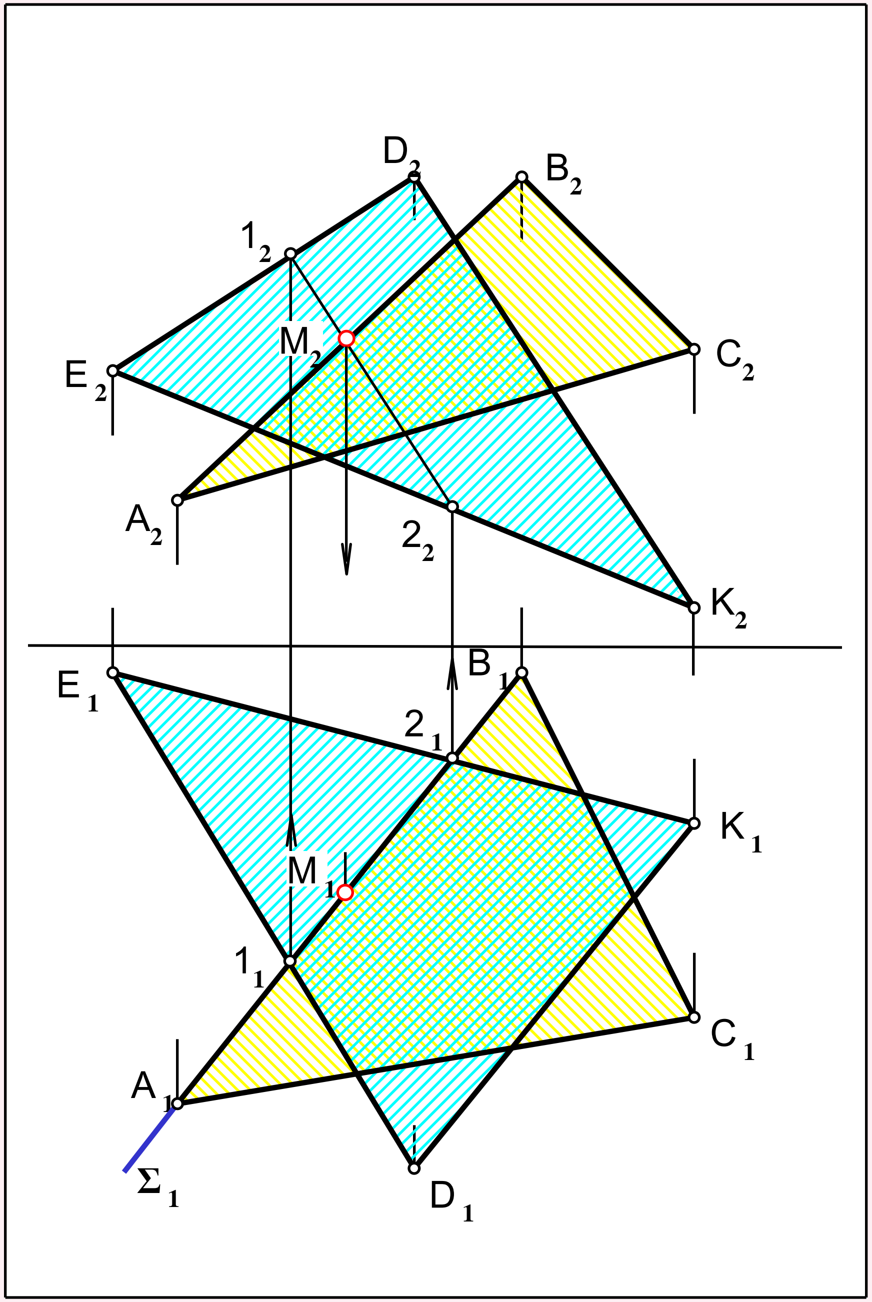
Для определения точек линии пересечения обе заданные плоскости **α** и **β** пересекают двумя вспомогательными (параллельными между собой) плоскостями-посредник. Некоторое упрощение можно достичь, если вспомогательные плоскости проводить через прямые, задающие плоскость.

Рассмотрим пример. Плоскость **α** задана (**ABC**), плоскость **β** задана (**DEK**). Точки **M** и **N**, определяющие искомую линию пересечения двух данных плоскостей найдем как точки пересечения каких-либо двух сторон (как две прямые) треугольника **ABC** с плоскостью другого треугольника **DEK**, т.е. дважды решим позиционную задачу на определение точки пересечения прямой с плоскостью по рассмотренному алгоритму.

Выбор сторон треугольников произволен, так как только построением можно точно определить, какая действительно сторона и какого треугольника пересечет плоскость другого. Выбор плоскости-посредник также произволен, так как прямую общего положения, какими являются все стороны треугольников **ABC** и **DEK**, можно заключить в горизонтально проецирующую или во фронтально проецирующую плоскости.



Здесь вы видите аксонометрическое изображение решения задачи на определение линии MN пересечения двух плоскостей ABC и DEK.



1-й этап решения

Для построения точки M использована горизонтально проецирующая плоскость - посредник Σ (Σ $_1$), в которую заключена сторона AB Δ ABC (AB ⊂ α).

1. Обозначаем горизонтально проецирующую плоскость - Σ

2-й этап решения

Строим линию пересечения (на чертеже она задана точками 1 и 2) плоскости-посредника Σ (Σ_1) и плоскости DEK.

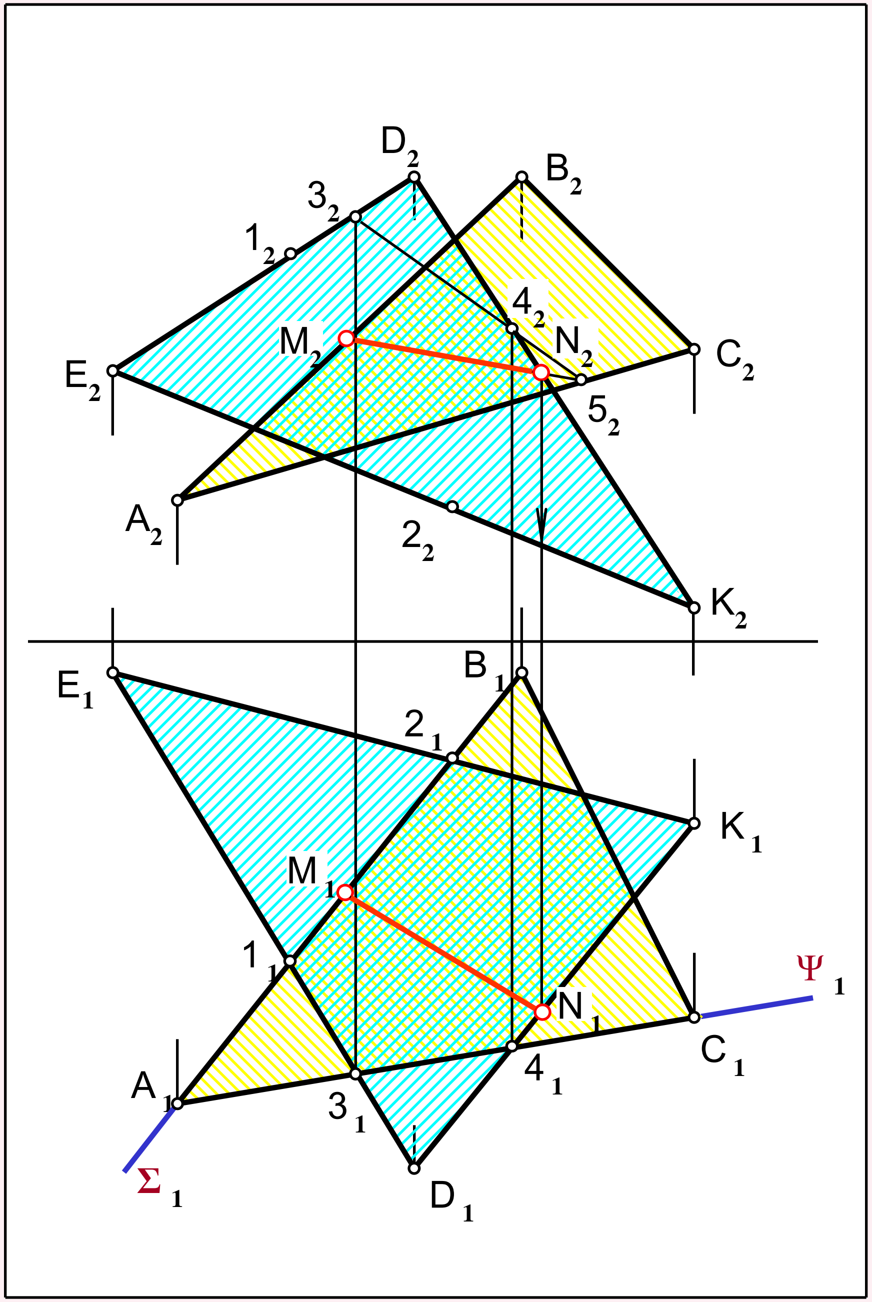
2. Ставим точки пересечения на плоскости $П_1$ - 1_1 и 2_1 и переносим их на $П_2$ на одноименные стороны треугольника- 1_2 и 2_2 Соединяем точки 1_2 и 2_2 тонкой линией.

3-й этап решения

Находим точку M пересечения прямой 1 - 2 с прямой AB.

3. Пересечение проекций прямых $1_2 2_2$ и A_2B_2 обозначаем M_2 и переносим её на горизонтальную проекцию прямой A_1B_1 - M_1

Найдена одна точка M искомой линии пересечения.



Для построения точки N использована горизонтально проецирующая плоскость Ψ (Ψ_1), в которую заключена сторона AC ΔABC.

Построение аналогично предыдущим.

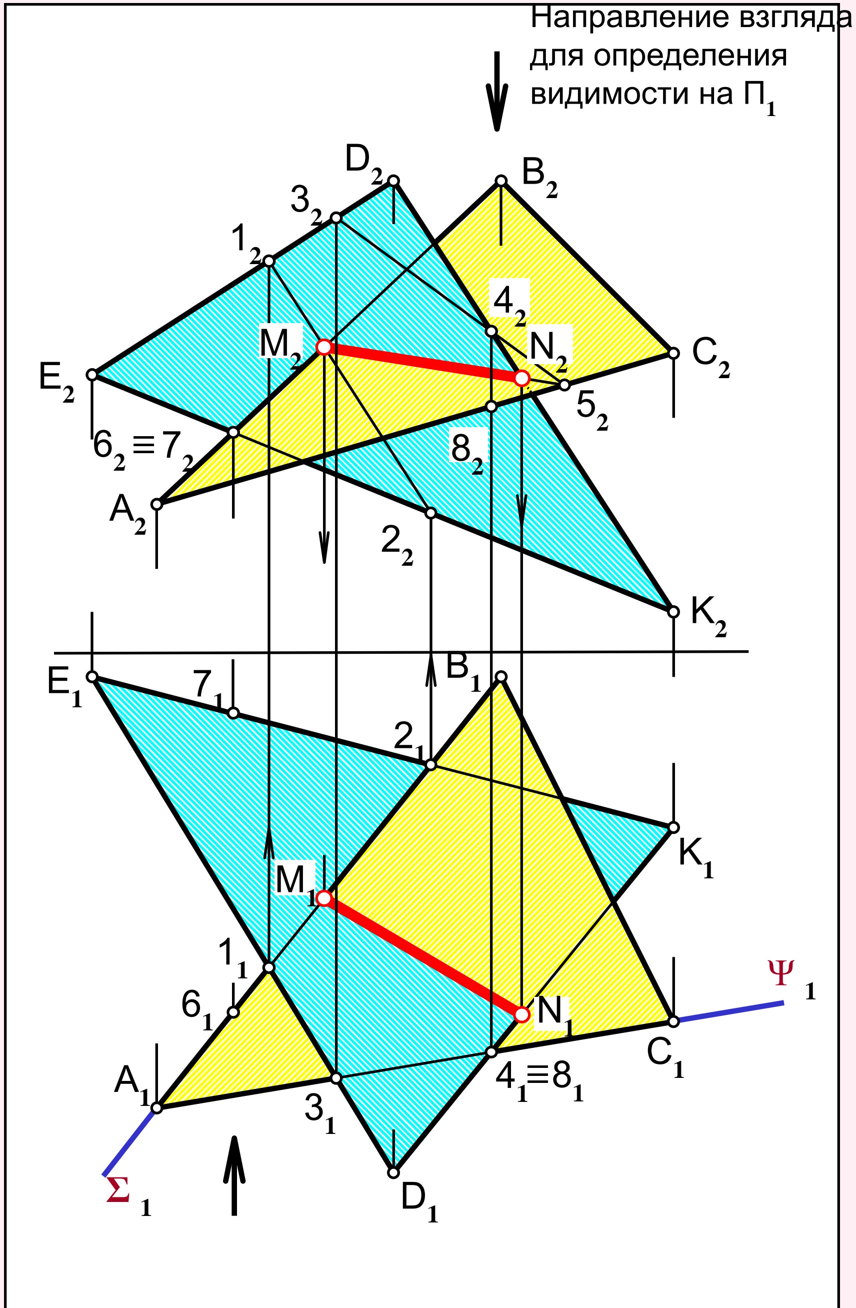
1.Обозначаем горизонтально проецирующую плоскость Ψ_1

2.Ставим точки пересечения 3_1 и 4_1 .

3.Переноси точки 3_1 и 4_1 на фронтальную проекцию на одноименные стороны треугольника - 3_2 и 4_2 .

3. Пересечение проекций прямых 3_24_2 и D_2K_2 обозначаем N_2 и переносим её на горизонтальную проекцию прямой D_1K_1 - N_1 .

Обращаем внимание, что фактически видимым стало пересечение ΔABC прямой DK, а не AC! Если повторить решение заключив в проецирующую плоскость DK, то ответ будет таким же.



Определение видимости

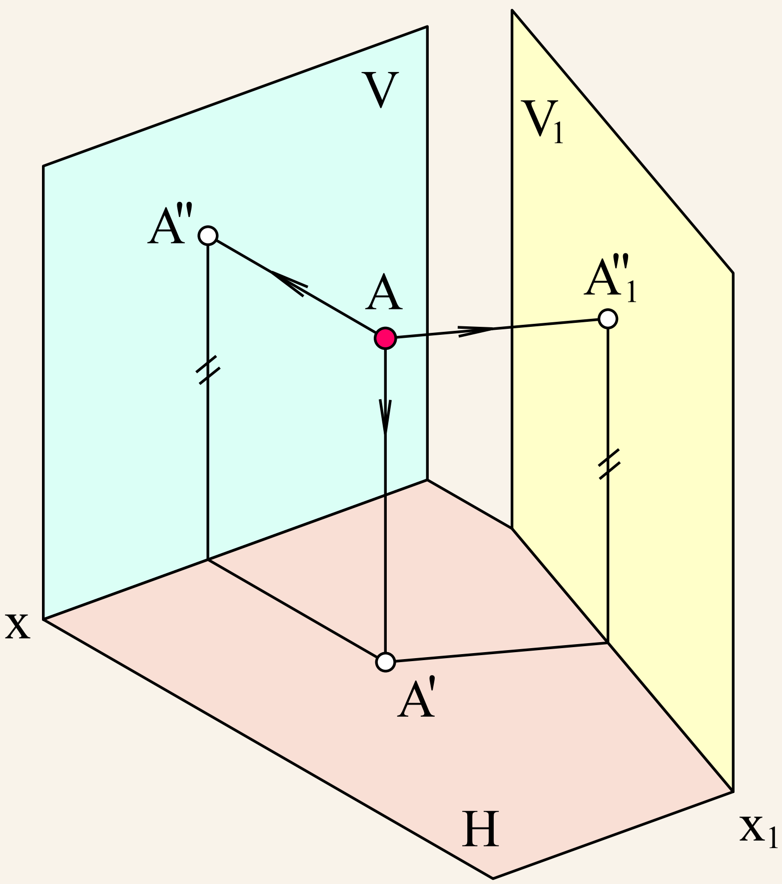
Определение видимости на плоскости $П_1$ выполнено с помощью горизонтально конкурирующих точек. Смотрим на горизонтальную проекцию скрещивающихся прямых АС и DK. На прямой АС есть точка 4, на проекции прямой DK ставим точку 8 ($4_1 \equiv 8_1$).

Точка 4 расположена над точкой 8 (4_2 и 8_2), поэтому на плоскости $П_1$ часть треугольника DEK, расположенная в сторону точки 4, закрывает собой часть треугольника АВС, расположенную от линии пересечения в сторону точки 8.

С помощью пары фронтально конкурирующих точек 6 и 7 ($6_2 \equiv 7_2$) определена видимость на плоскости $П_2$.

Невидимые линии проводим тонкой штриховой линией, а видимые толстой основной.

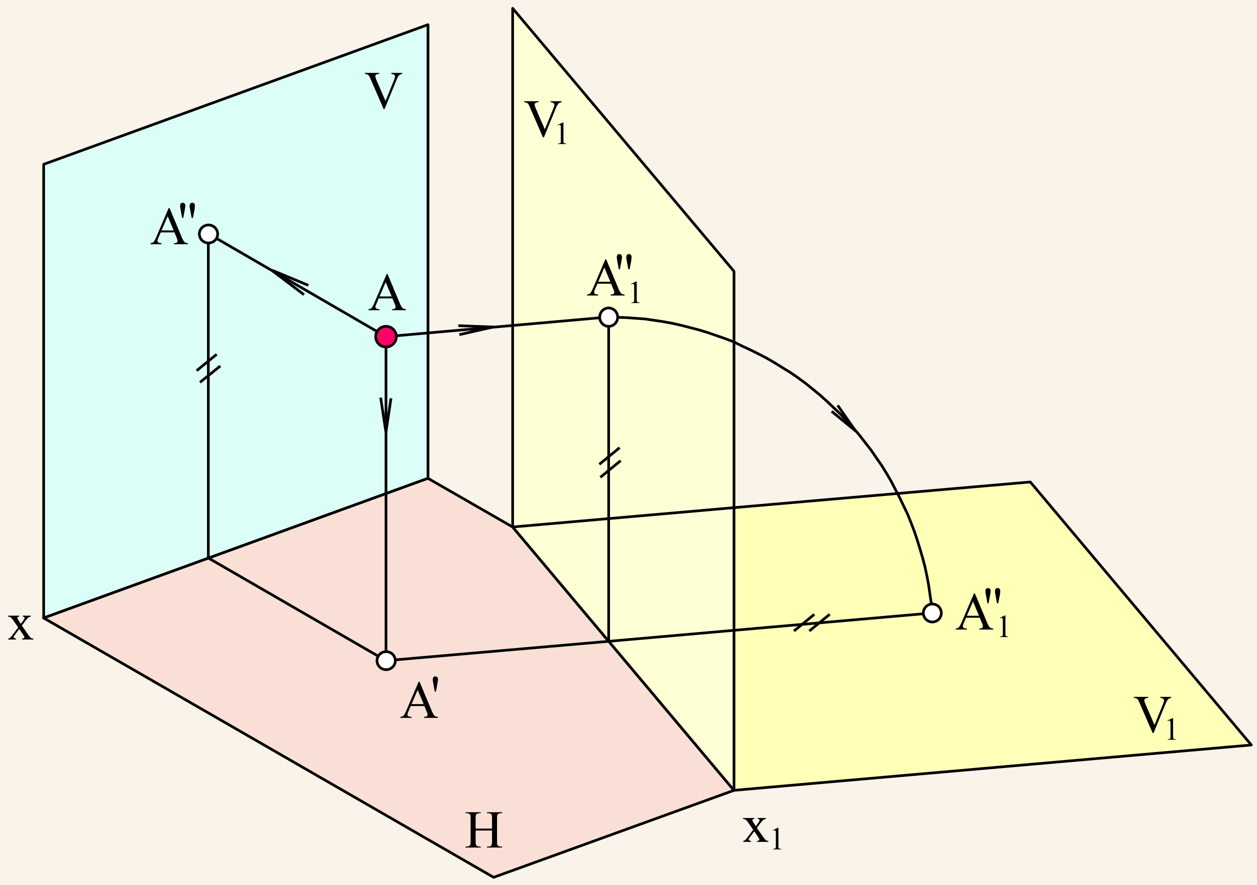
4.1. Способ замены плоскостей проекций



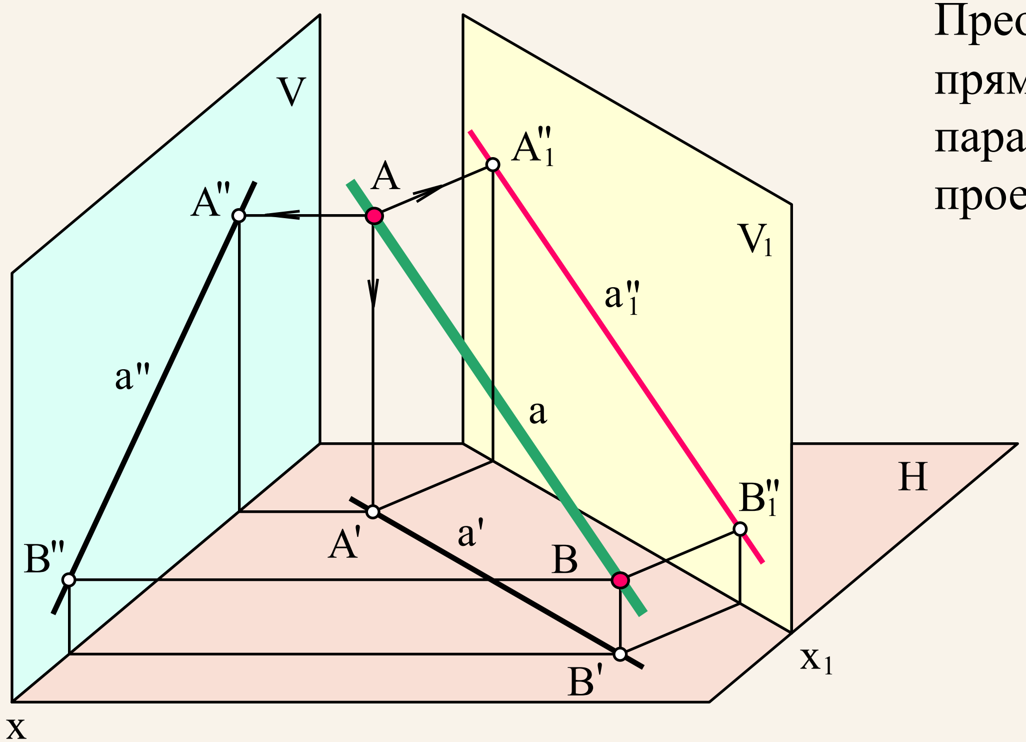
Этот способ состоит в том, что заданная фигура неподвижна, а одна из основных плоскостей V или H заменяется новой дополнительной плоскостью V_1 или H_1, расположенной параллельно или перпендикулярно заданной геометрической фигуре. Точка A задана в системе V/H. Плоскость V замерена новой плоскостью V_1 перепендикулярной H. Плоскость H является общей в системе V/H и H/V_1, то координата z_A остается неизменной. Следовательно, расстояние от новой фронтальной проекции до новой оси x_1 равно расстоянию от заменяемой проекции до оси x.

Для получения плоского чертежа точки A плоскость V_1 вращают вокруг оси x_1 до совмещения с плоскостью H.

Новая фронтальная проекция A_1'' точки A окажется на общем перпендикуляре к новой оси x_1 с оставшейся без изменения ее проекции A'.



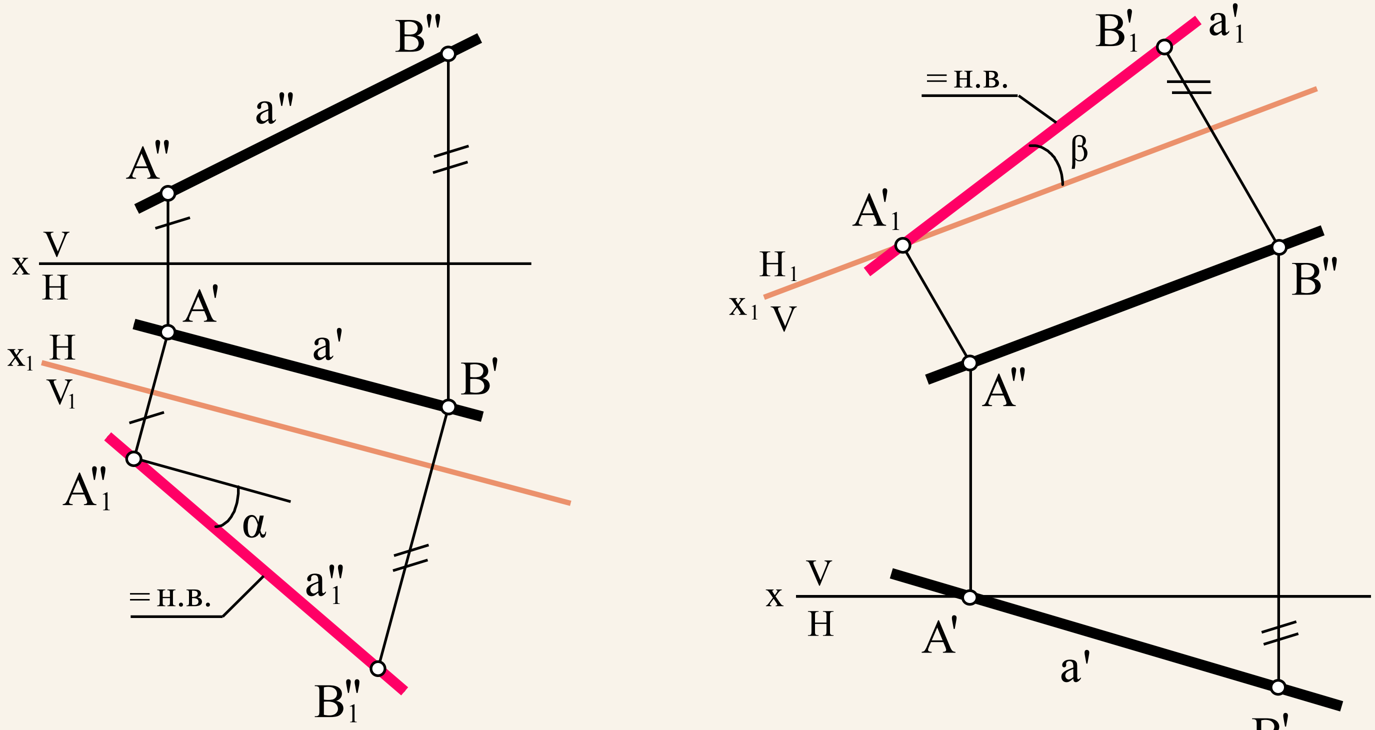
Решение четырех основных задач способом замены плоскостей проекций



Задача 1.

Преобразовать чертеж так, чтобы прямая общего положения оказалась параллельной одной из плоскостей проекций

Новую проекцию прямой, отвечающую поставленной задачи, можно построить на новой плоскости проекций $\mathbf{V_1}$, расположив ее параллельно самой прямой и перпендикулярно плоскости **H**, т.е. от системы плоскостей **V/H** с осью проекций **x** следует перейти к системе $\mathbf{H/V_1}$ с новой осью $\mathbf{x_1}$.



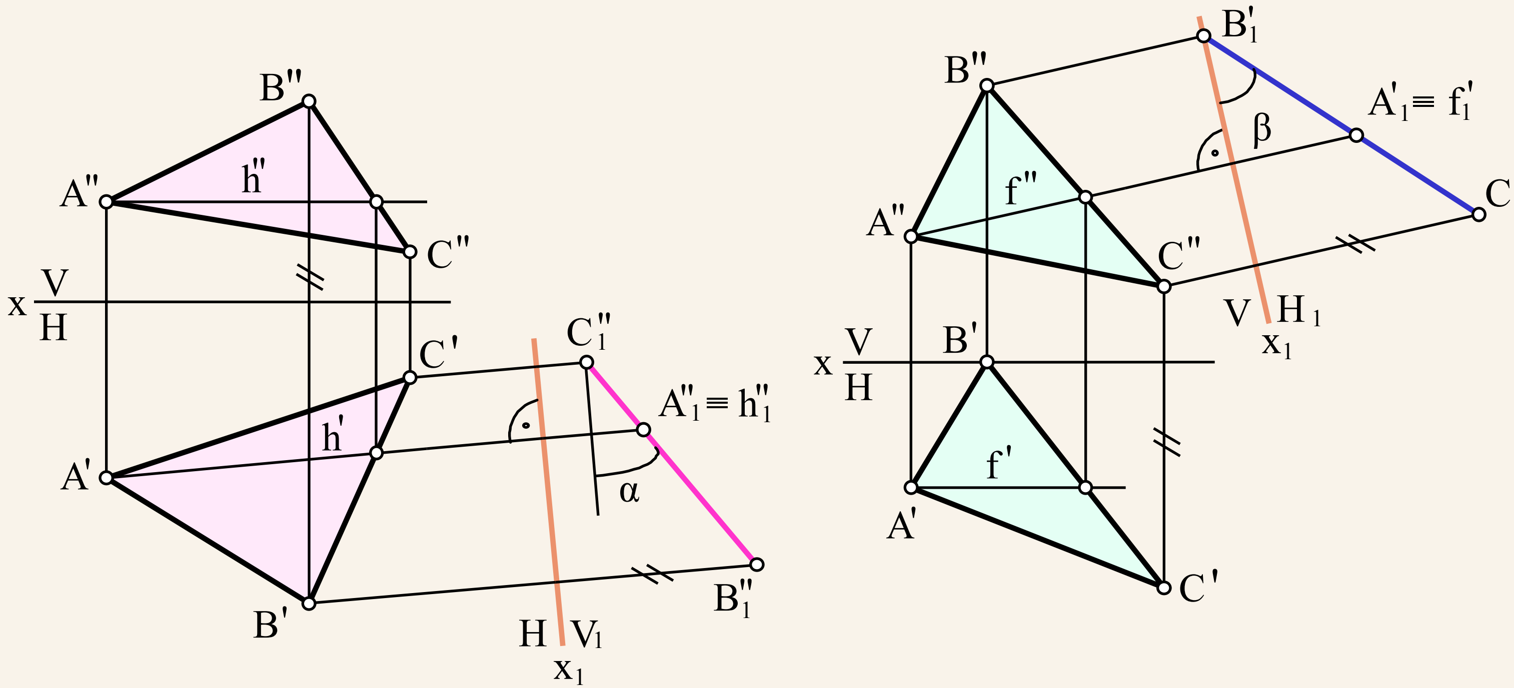
а) б)

На плоском чертеже новая ось x_1 проведена параллельно а', новые линии связи $A'A_1''$ и $B'B_1''$ проведены перпендикулярно оси x_1. Новые фронтальные проекции A_1'' и B_1'' точек A и B получают, измерив от оси x на поле V координаты высот z_A и z_B, отложив их от оси x_1 на новое поле V_1.

Новая проекция a_1'' дает натуральную величину отрезка AB и угол α наклона его к плоскости H.

Угол наклона прямой а к плоскости V можно определить, построив изображение прямой на другой дополнительной плоскости $H_1 \perp V$, где $H_1 // a$.

Задача 3. Преобразовать чертеж так, чтобы плоскость общего положения в новой системе плоскостей проекций стала проецирующей.

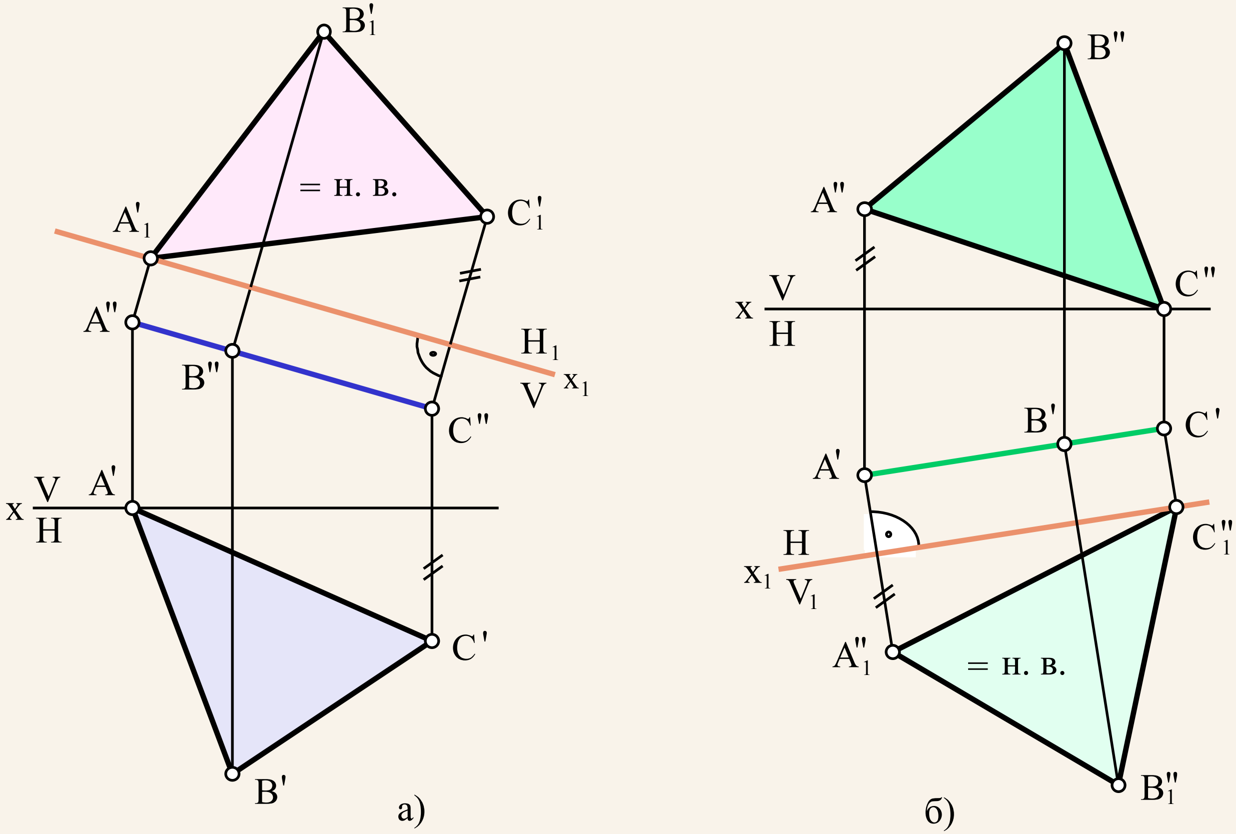


а) б)

Для этого в плоскости ABC проведена горизонталь h. Новая плоскость проекций V_1 расположена перпендикулярно H. Горизонталь на поле V_1 изобразится точкой, а вся плоскость прямой линией $C_1''A_1''B_1''$ с углом α, который определяет угол наклона плоскости ABC к плоскости H (рис.а).

Построив изображение плоскости в системе V/H_1, где H_1 расположена перпендикулярно фронтали f (рис. б) плоскости, можно определить угол β наклона ABC к плоскости V.

Задача 4. Преобразовать чертеж так, чтобы проецирующая плоскость в новой системе плоскостей проекций заняла положение плоскости уровня.



Решение этой задачи позволяет определять натуральные величины плоских фигур и углов.

Новую плоскость проекций нужно расположить параллельно заданной плоскости.

Если исходное положение плоскости было фронтально проецирующим (рис. а), то новое изображение строят в системе V/H_1, а если горизонтально проецирующем (рис. б), то в системе H/V_1.

Новая ось проекций x_1 будет параллельна линейной проекции заданной плоскости.