Системы линейных уравнений

Системой m линейных уравнений с n неизвестными называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

где *aij* и *bi* (*i*=1,…,*m*; *b*=1,…,*n*) – некоторые известные числа, *x1,…,xn* – неизвестные.

В обозначении коэффициентов *aij* первый индекс *i* обозначает номер уравнения, а второй *j* – номер неизвестного, при котором стоит этот коэффициент.

Коэффициенты при неизвестных будем записывать в виде матрицы , которую назовём *матрицей системы*.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Числа, стоящие в правых частях уравнений, *b1,…,bm* называются *свободными членами.*

- <u>Решение системы</u> — совокупность **n** чисел *c*1, *c*2, …, *cn*, таких что подстановка каждого *ci* вместо *xi* в систему обращает все ее уравнения в тождества.

- Система называется <u>*совместной*</u>, если она имеет хотя бы одно решение, и <u>*несовместной*</u>, если у нее нет ни одного решения.

Матрицы дают возможность кратко записать систему линейных уравнений.
Пусть дана система из 3-х уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

Рассмотрим матрицу системы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Определитель третьего порядка, соответствующий матрице системы, т.е. составленный из коэффициентов при неизвестных,
называется *определителем системы*.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Определитель, действие 1

a_{11}	a_{12}	a_{13}
a_{21}	a_{22}	a_{23}
a_{31}	a_{32}	a_{33}

Определитель, действие 2

a_{11}	a_{12}	a_{13}
a_{21}	a_{22}	a_{23}
a_{31}	a_{32}	a_{33}

Определитель, действие 3

a_{11}	a_{12}	a_{13}
a_{21}	a_{22}	a_{23}
a_{31}	a_{32}	a_{33}

Определитель, действие 4

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

Определитель, действие 5

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

Определитель, действие 6

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

$$= a_{11} * a_{22} * a_{33} + a_{12} * a_{23} * a_{31} +$$

$$a_{21} * a_{32} * a_{13} -$$

$$- a_{31} * a_{22} * a_{13} - a_{12} * a_{21} * a_{33} -$$

$$a_{23} * a_{32} * a_{11}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Составим ещё три определителя следующим образом: заменим в определителе D последовательно 1, 2 и 3 столбцы столбцом свободных членов

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Теорема (правило Крамера). Если определитель системы $\Delta \neq 0$, то рассматриваемая система имеет одно и только одно решение, причём

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

КРАМЕР Габриель (Cramer Gabriel 1704-1752)

- Крамер - швейцарский математик. Родился в Женеве. Был учеником и другом Иоганна Бернулли. Учился и работал в Женеве.
- Основные труды по высшей алгебре и аналитической геометрии. Установил и опубликовал правила решения систем n линейных уравнений с n неизвестными с буквенными коэффициентами (правило Крамера), заложил основы теории определителей, но при этом еще не пользовался удобным обозначением определителей.
- Член Лондонского королевского общества (1749г.)

$$\begin{cases} x+2y-z=2, \\ 2x-3y+2z=2, \\ 3x+y+z=8. \end{cases} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -5+2\cdot 4-11=-8\neq 0.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -10+28-26=-8, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 8 & 1 \end{vmatrix} = -14+8-10=-16,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 8 \end{vmatrix} = -26-20+22=-24.$$

Методы решения системы

- **Прямые методы**
- Метод Гаусса
- Метод Жордана-Гаусса
- **Метод Крамера**
- Матричный метод
- Метод прогонки

- **Приближенные методы**
- Метод ЯкобиМетод Якоби (метод простой итерации)
- Метод Гаусса-Зейделя
- Метод релаксации
- Многосеточный метод