

Математическое и имитационное моделирование

Виды исследования объекта

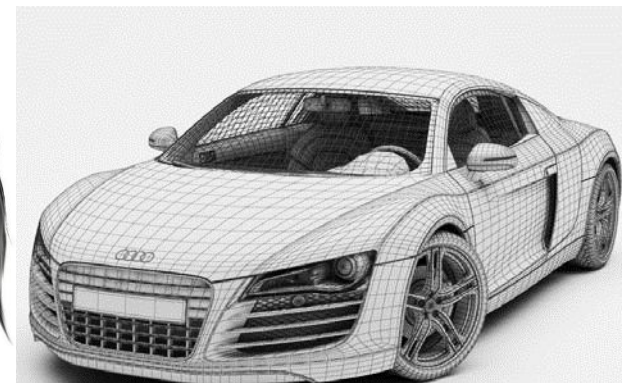
1. Созерцание (пассивное наблюдение за объектом, пассивный эксперимент)



2. Эксперимент (постановка объекта в определенные условия для его изучения, т.е. активное наблюдение)

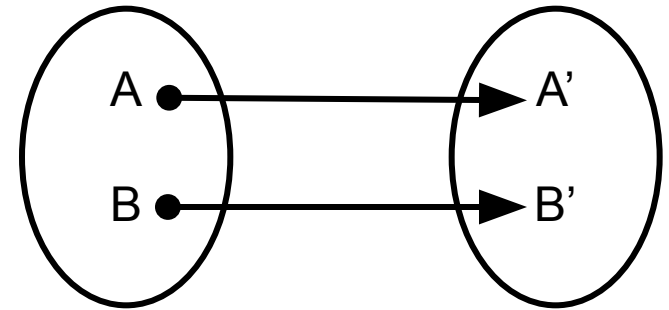


3. Моделирование (создание упрощенного аналога объекта и изучение аналога)

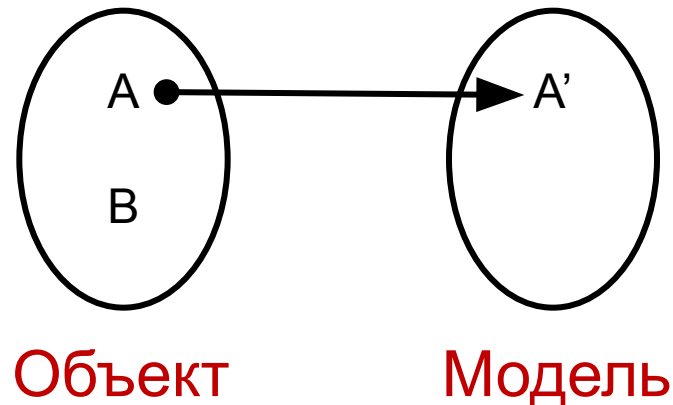


Изоморфизм и гомоморфизм – основа моделирования

Изоморфизм – совпадение двух объектов, т.е. их подобие в обе стороны (каждому элементу системы А соответствует элемент системы В).



Гомоморфизм – подобие одного объекта другому, но не наоборот (каждому элементу системы В соответствует элемент системы А).



Полный изоморфизм возможен только для абстрактных (идеальных) объектов. Например, совпадение между геометрической фигурой и ее аналитическим выражением (формула круга: $x^2 + y^2 = r^2$)

Когда необходимо моделирование?

1. Если изучение реального объекта очень дорого.
2. Реальный объект не поддается экспериментальному исследованию (например, процессы в космосе).
3. Испытание объекта может нанести урон окружающей среде.
4. Испытание является негуманным.

Области применения моделирования

1. Физика
2. Медицина
3. Технические науки
4. Экономика
5. Лингвистика
6. Литература (художественный образ)
7. Театр (система М. Чехова)

Моделирование в системе М. Чехова

Психологический жест для образа городничего из «Ревизора» Н.В. Гоголя



1. уклон в сторону – **хитрость**;
2. ноги слегка повернуты вовнутрь – **скрытность**
3. руки сжимаются в кулаки - напряженная воля;
4. пальцы приподняты, все тело слегка пригибается к земле, колени сгибаются – **трусость**;

Причины популярности моделирования

Основная часть необходимой информации для принятия окончательного решения количественной информации в последнее время формируется на стадии экспериментальной отработки технических устройств. По мере их усложнения и удорожания, а также удлинения стадии их экспериментальной отработки значимость проектировочных расчетов стала расти. Возникла необходимость в повышении достоверности таких расчетов, обеспечивающей более обоснованный отбор альтернатив на начальной стадии проектирования и формулировку количественных критериев для структурной и параметрической оптимизации.

История моделирования

1. Петроглифы (наскальные рисунки) – первые графические модели объектов (200 тыс. лет назад).
2. Слово, как обозначение объекта или явления.
3. Числа (первоначально зарубки, затем числа как система знаков). Предполагается, что зарубки были прототипом римских цифр.
4. В Греции создана модель солнечной системы (V-III вв. до н. э.)
5. Греческий врач Гиппократ для изучения строения человеческого глаза воспользовался его физической моделью — глазом быка.
6. В эпоху возрождения Брунеллески (1377-1446), Микеланджело (1475-1564) пользовались моделями проектируемых зданий. Модели широко использовались Леонардо да Винчи (1452-1519) и Г. Галлием (1564-1642) .
7. Имитационное моделирование (1950-е годы)

Основные понятия моделирования

Объект (лат. objectum – предмет) – все то, на что направлена человеческая деятельность.

Субъект – человек, изучающий объект.

Абстракция - выделение только основные свойств объекта.

Аналогия – суждение о каком-либо частном сходстве двух объектов.

Модель (лат. modulus – мера) – объект-заместитель объекта-оригинала, обеспечивающий изучение некоторых свойств оригинала.

Моделирование – это замещение одного объекта другим с целью получения информации о важнейших свойствах объекта-оригинала с помощью объекта-модели путем проведения эксперимента с моделью. Модель строится исходя из определенной **цели**.

Гипотеза (предположение) – определенные предсказания, предположения, основанные на небольшом количестве опытных данных, наблюдений, догадок.

Эксперимент – процедура организации наблюдений каких-то явлений, которые осуществляют в условиях, близких к естественным, либо имитируют их. Эксперимент бывает **пассивный**, когда исследователь наблюдает протекающий процесс, и **активный**, когда наблюдатель организует протекание процесса.

Основные понятия моделирования

Формализация – сведение некоторого содержания к выбранной форме (например, формализация мыслей в виде текста, формализация зависимости характеристик в виде математической формулы).

Предметная область - мысленно ограниченная область реальной действительности или область идеальных представлений, подлежащая описанию (моделированию) и исследованию.

Свойство - характерная особенность объекта, которая может быть замечена и оценена субъектом, например, вес, цвет, длина, плотность. Свойства делятся на **внутренние** (параметры), т.е. свойства объекта, и **внешние** (факторы), т.е. характеристики среды, в которой находится объект, влияющие на объект.

Показатель свойства – оценка исследуемого свойства объекта. Для показателя необходимо определить множество значений.

Событие – акт смены состояния объекта.

Процесс – последовательность взаимосвязанных событий в определенном интервале времени.

Альтернатива – один из вариантов проектных решений, ведущих к намеченной цели (с помощью моделирования выбирается наиболее оптимальная альтернатива).

Основные понятия моделирования

Вычислительный эксперимент – эксперимент, произведенный над аналитической или имитационной моделью.

Расчетная схема (концептуальная модель, содержательная модель) - модель, описывающая объект, на основе которой строится математическая модель.

Математическая модель (ММ) – формализация расчетной схемы на математическом языке.

Фазовые переменные – входные (X) и внешние (Z) параметры модели.

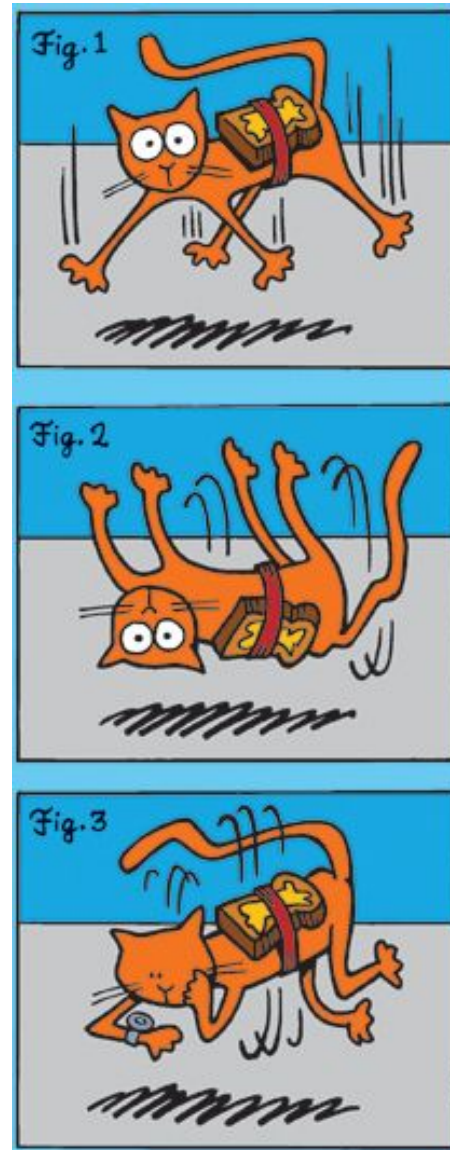
Исследование операций – дисциплина, занимающаяся разработкой и применением методов нахождения оптимальных решений.

Целевая функция – функция оценивающая оптимальность параметров модели.

Парадоксы абстракции



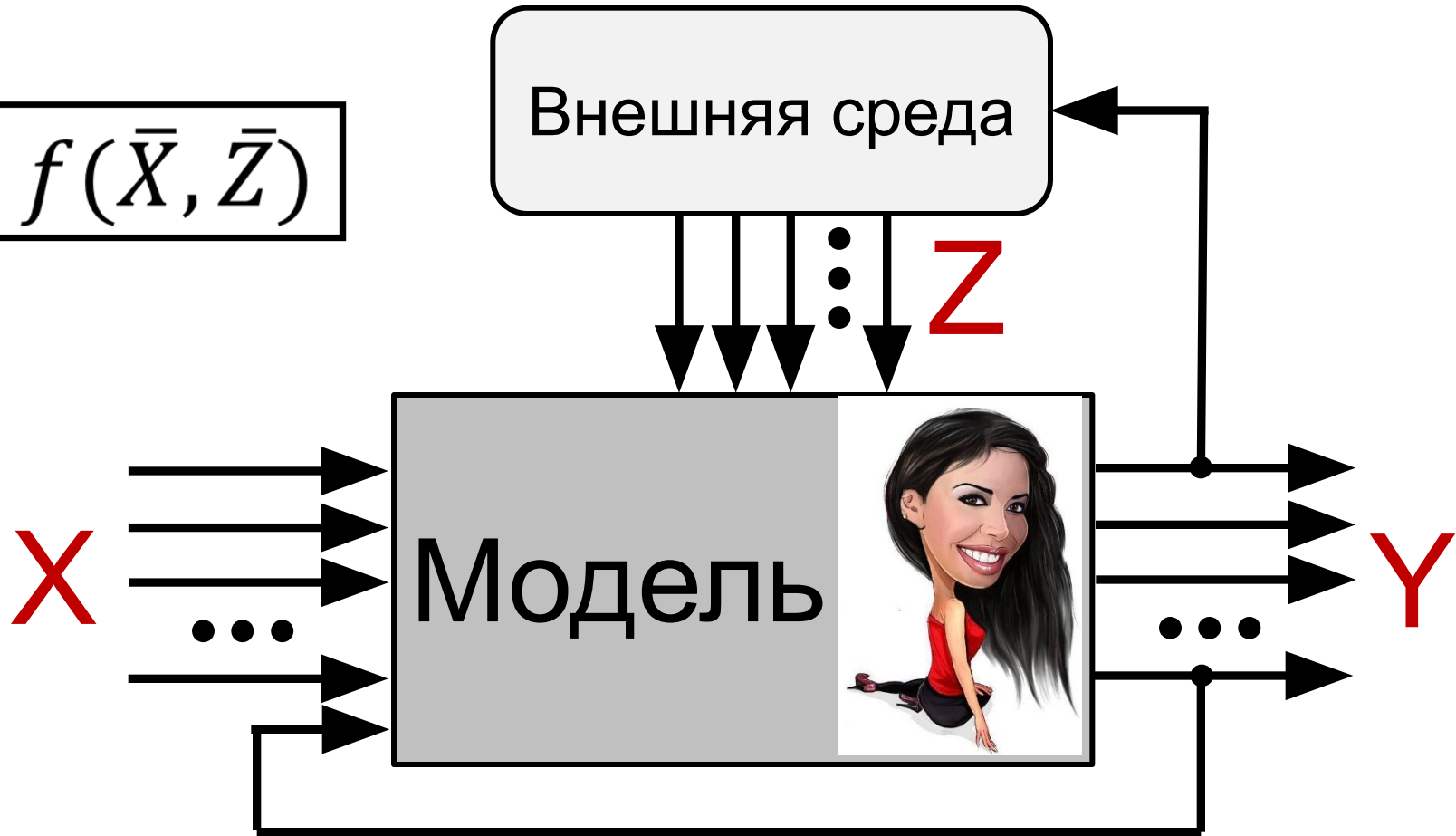
Известный в научном мире жаргонизм «круглая корова» или «круглая лошадь» - вот, к чему может привести излишней абстракцией. Такая абстракция порождает неправильные результаты моделирования.



Кошка с привязанные к ее спине бутербродом

Математическая модель (ММ) как «чёрный ящик» (функциональная ММ)

$$\bar{Y} = f(\bar{X}, \bar{Z})$$



X – входные сигналы (внутренние параметры)

Z – внешнее воздействие на объект/модель (внешние параметры)

Y – выходные сигналы (характеристики)

+ *структурная модель (учитывает структуру объекта)*

Пример модели

Объект: физическая система (тело массой m скатывается по наклонной плоскости с ускорением a , на которое воздействует сила F).

Ньютон получил математическое соотношение: $F=ma$ - это математическая модель физической системы. При построении этой модели приняты гипотезы:

- 1) поверхность идеальна (т.е. коэффициент трения равен нулю);
- 2) сопротивление воздуха равно нулю);
- 3) масса тела неизменна;
- 4) тело движется с одинаковым ускорением в любой точке.

Задачи математического моделирования

1. **Прямая задача** (поверочный расчет) – вычисление входных параметров (Y) модели по заданным входным (X, Z)
2. **Обратная задача** (проектировочный расчет) – по заданным заранее внешним и выходным параметрам (Y, Z) найти оптимальные внутренние параметры объекта (X). Цель проектировочного расчета – оптимизация внутренних параметров модели/объекта по некоторому критерию оптимальности (целевой функции).
3. **Задачи идентификации** (распознавания) ММ – разработка ММ для объекта, т.е. нахождение функции f .

Важнейшие свойства модели

Адекватность (валидность) – соответствие модели оригиналу.
(Адекватность зависит от цели моделирования !!!)

Точность – степень точности копирования свойств объекта моделью.

Цель – для решения какой задачи создается модель.

Управляемость – например, число параметров модели.

Целостность – степень слаженности подсистеме модели.

Робастность (от англ. robust – крепкий, устойчивый) – устойчивость ММ по отношению к исходным данным.

Продуктивность – полезность ММ, способность проверить адекватность ММ на практике (например, если погрешность измерения характеристики объекта намного меньше точности ММ, то ММ непродуктивна)

Сложность

Наглядность

Универсальность

Цель модели

Даже для одного объекта могут существовать совершенно разные модели в зависимости от того, какая цель ставится при их создании.

Например, будут совершенно разные *модели человека*, если его изучать с точки зрения:

- физиологии;
- психологии;
- медицины;
- геометрии;
- и т.д.



Адекватность модели

Пусть относительная погрешность модели будет δ . Тогда можно построить область адекватности ММ:

$$X = \{x \in \mathbb{R}^k : \varepsilon \leq \delta\} \subset \mathbb{R}^k$$

Т.е. при одних значениях X ММ может быть адекватной, при других – нет.

Точность модели

$$\varepsilon_i = \frac{y_i^M - y_i^P}{y_i^P}, \quad i = \overline{1, n}$$

$$\varepsilon = (\varepsilon_1 \ \varepsilon_2 \ \dots \ \varepsilon_i \ \dots \ \varepsilon_n)^T \in \mathbb{R}^n$$



$$\varepsilon = \sqrt{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2}$$

ИЛИ
$$\varepsilon = \max_{i=\overline{1, n}} |\varepsilon_i|$$

Экономичность имитационной модели



- Затраты машинного времени на вычисления по модели (временная сложность);
- Затраты оперативной памяти, необходимой для функционирования модели (ёмкостная сложность);

Робастость модели

Робастость – устойчивость ММ по отношению к исходным данным, способность нивелировать погрешности и не допускать их сильного влияния на результат вычислительного эксперимента.

Причины нарушения устойчивости модели:

- Необходимость вычисления близких друг другу величин.
- Деление на малую по модулю величину.
- Скачкообразно изменяющиеся функции, входящие в описание ММ.
- Параметры, известные с небольшой точностью (такие величины могут способствовать получению бесконечной величины на выходе модели).

Довольно часто увеличение полноты ММ приводит к снижению ее робастости из-за введения дополнительных параметров известных с малой вероятностью и функций, способных получить бесконечную величину на выходе

Универсальность математической модели

Довольно часто одна и та же математическая модель может быть применена для описания различных объектов.

Например, уравнение Пуассона $\nabla^2 u(M) + f(M) = 0$

Где $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ дифференциальный оператор Лапласа,

M – координаты точки в пространстве,

$u(M)$ и $f(M)$ – искомая и заданная функции относительно точки M .

Применимо к изучению установившихся процессов: течения жидкости, распространения теплоты и электрического потенциала, деформации мембраны, механического напряжения при кручении бруса, фильтрация нефти в нефтяном слое или воды в почве, распространения примеси в воздухе или эпидемии в регионе. В каждой из областей применения этой ММ функции $u(M)$ и $f(M)$ имеют свой смысл.

Например, для расчета электрического потенциала функция Пуассона принимает вид:

где ϕ - электрический потенциал,

ρ - пространственная плотность заряда,

ϵ_0 – диэлектрическая проницаемость в вакууме.

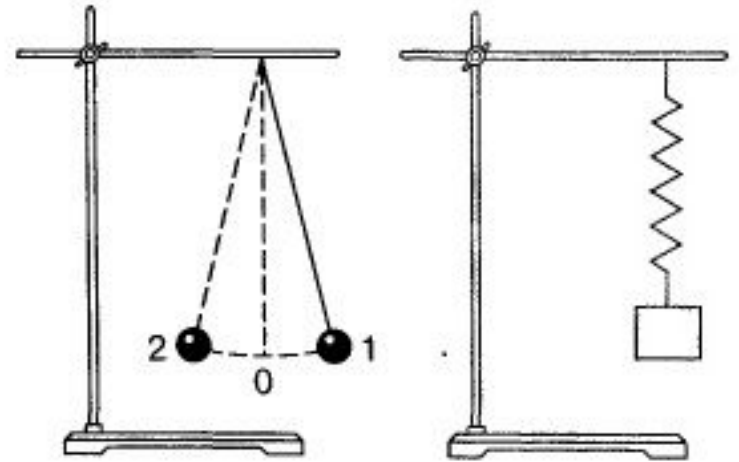
$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0},$$

Универсальность математической модели

Гармоническое уравнение: $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$

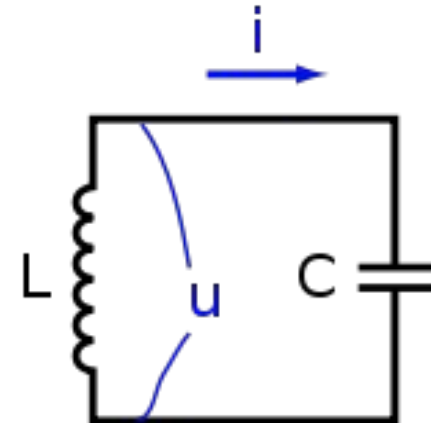
Применимо как для описания:

колебания маятника: $\omega = \sqrt{g/L}$



Колебательный
электрический контур:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$



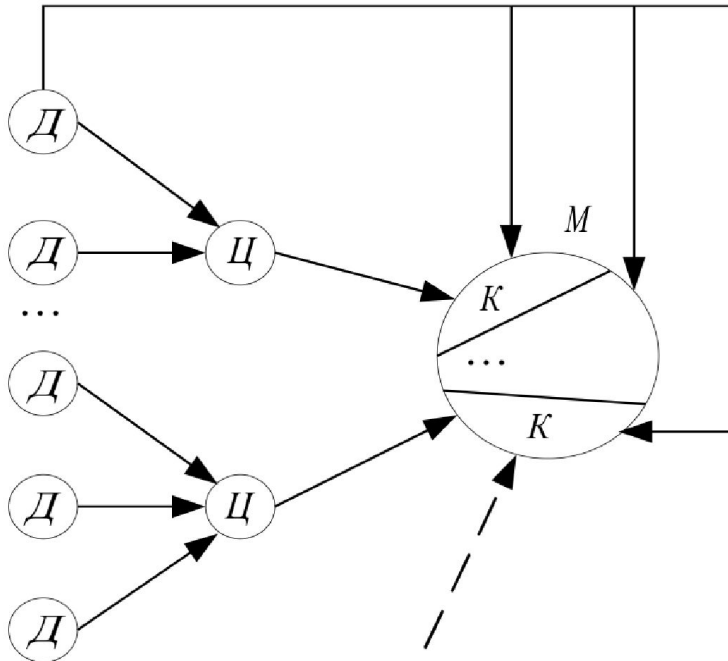
Два подхода к созданию модели

Классический (индуктивный) – от частного к общему: разработка частей модели самой низкой иерархии, затем объединение мелких частей в более сложные и т.д. до синтеза всей модели.

Системный (дедуктивный) – от общего к частному: основой модели является цель (т.е. для чего нужна модель), затем формируется абстракция верхнего уровня, затем из нее выделяются части, затем части снова разделяются и т.д. до самого нижнего уровня.

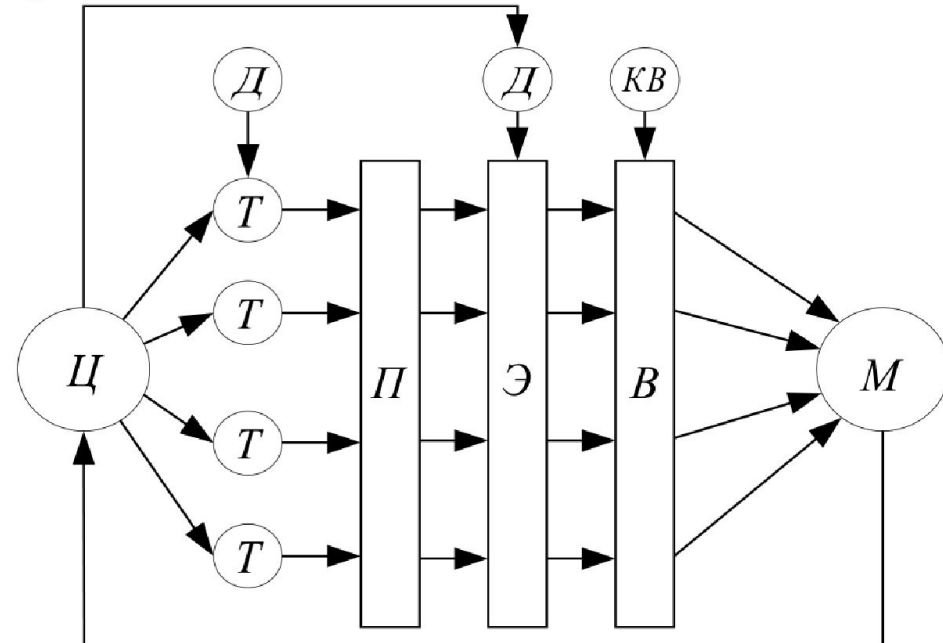
Два подхода к созданию модели

Классический



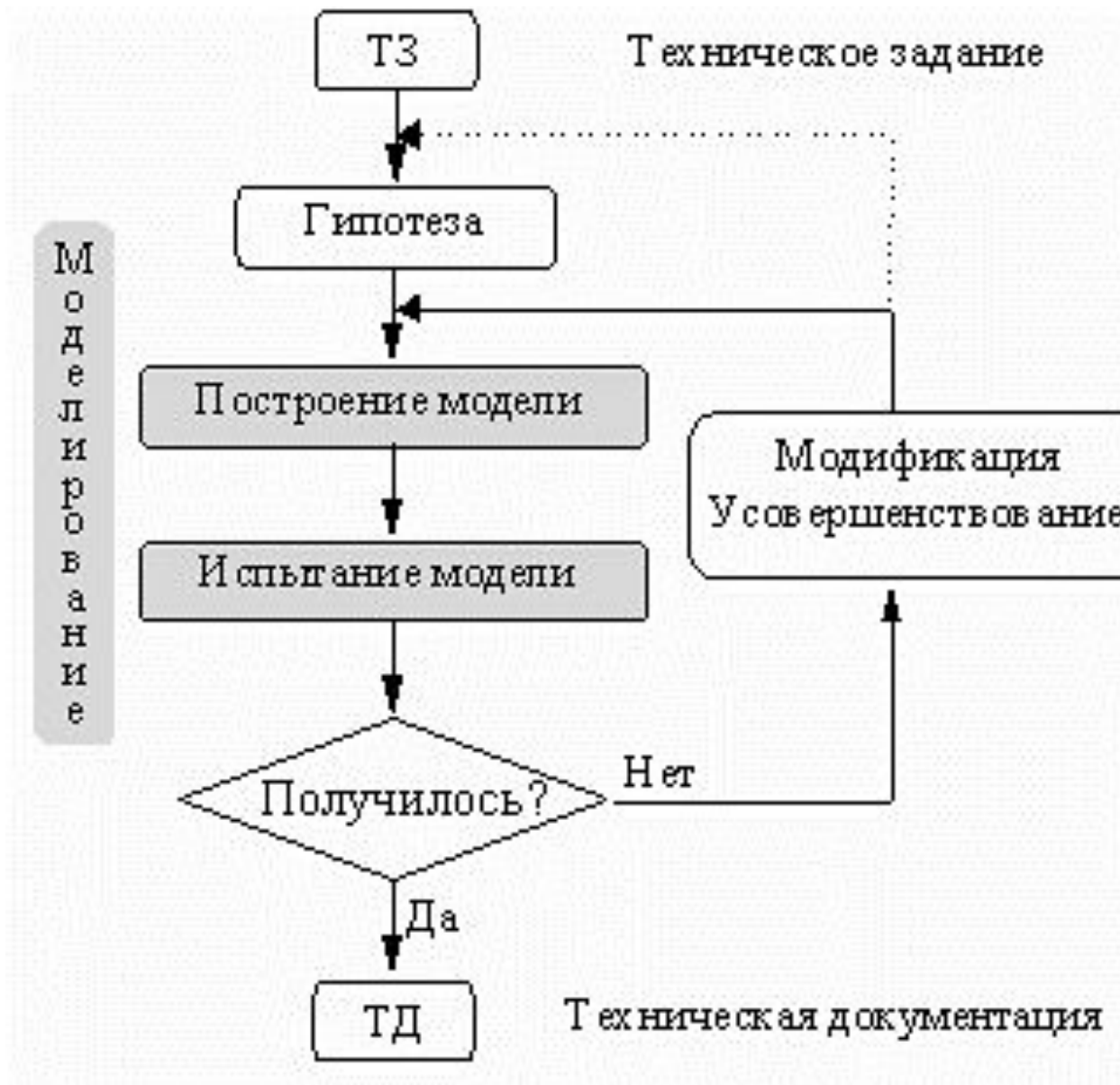
Д – исходные данные;
Ц – цель моделирования;
К – компонент;
П-подсистема;

Системный



Т – требования к модели;
Э – элемент модели;
В – выбор.
КВ – критерий выбора.

Процесс моделирования



Классификация моделей

Умозрительная - физическая (натурная) – математическая

Математическая:

- аналитическая (математические формулы)
- имитационная (модель-алгоритм-программа)

Функциональная – структурная (топологическая - геометрическая) – алгоритмическая (модель, описанная с помощью алгоритма)

Статическая (установившиеся и периодические процессы) – динамическая/эволюционная – квазистационарная (динамический процесс рассматривается как стационарный)

Детерминированная – стохастическая

Полная – неполная – приближенная

Теоретическая – эмпирическая (от греч. «опыт») – полуэмпирическая

Линейная – нелинейная – линеаризованная

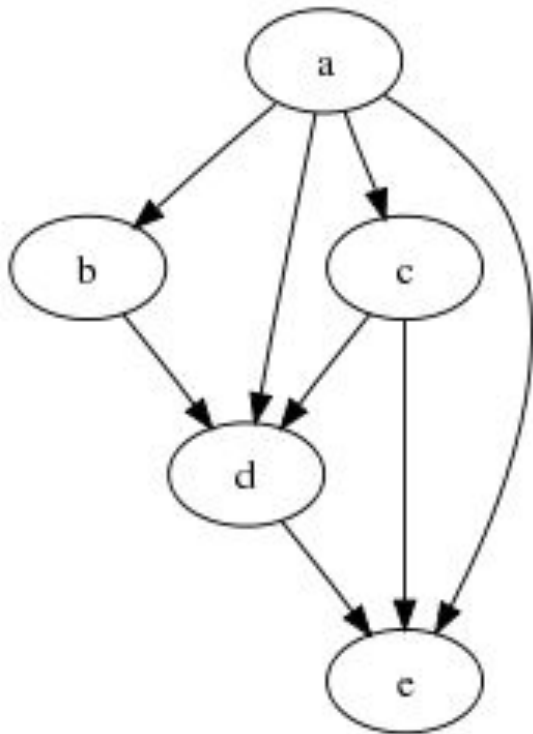
Непрерывная – дискретно-непрерывная - дискретная



Структурная модель

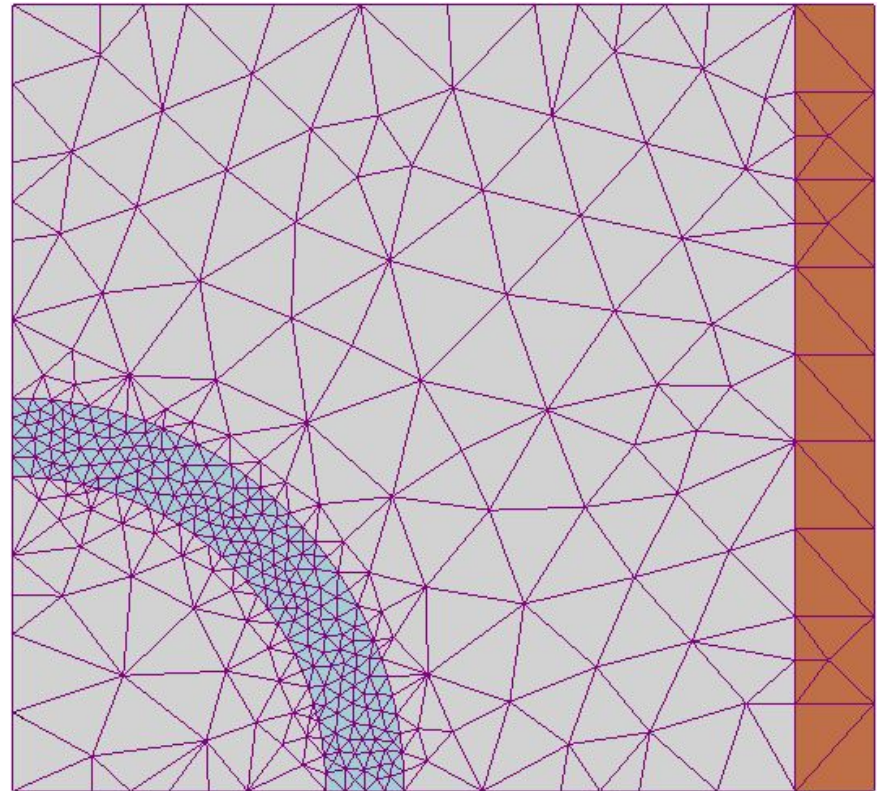
Топологическая

Учитывается только семантическая (смысловая) взаимосвязь подсистем – выражаются с помощью графа



Геометрическая

Учитывается метрика пространственных взаимоотношений подсистем ММ – выражаются сетки



Виды моделирования

- **Аналитическое** моделирование – взаимодействие элементов системы записывается в виде функциональных соотношений
- **Имитационное** моделирование – воспроизведение процесса функционирования моделируемой системы во времени (удобно для моделирования сложных систем)
- **Статическое** моделирование – моделирование методом статических испытаний (например, метод Монте-Карло).

Пример статистического моделирования (игла Бюфона)

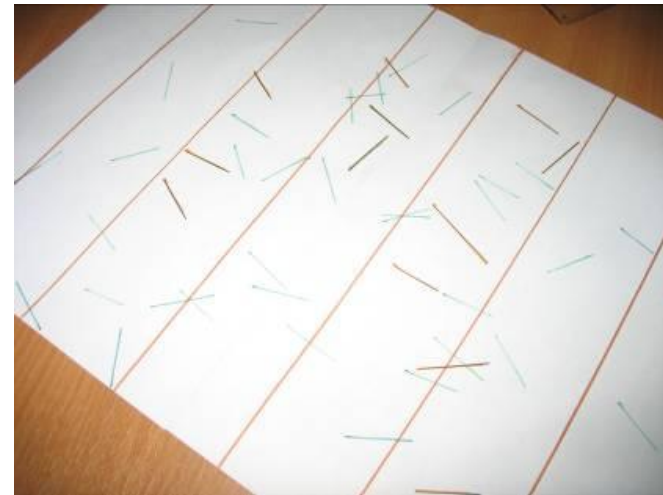
Лист бумаги расчерчиваем параллельными линиями с одинаковым расстоянием между ними. Возьмём иглку в два раза меньшей длины, чем расстояние между линиями (h – расстояние между линиями, l – длина иглы).

Будем бросать иглу на листку бумаги и подсчитаем количество бросаний n и число пересечений иглой линии m .

$p = m/n$ – вероятность пересечения линии, вычисленная экспериментально.

$p = (2/\pi) * (l/h)$, $\pi \approx 2 l n/mh$ – формула экспериментального нахождения значения π из задачи Бюфона

Метод монтекарло – статистическое моделирование

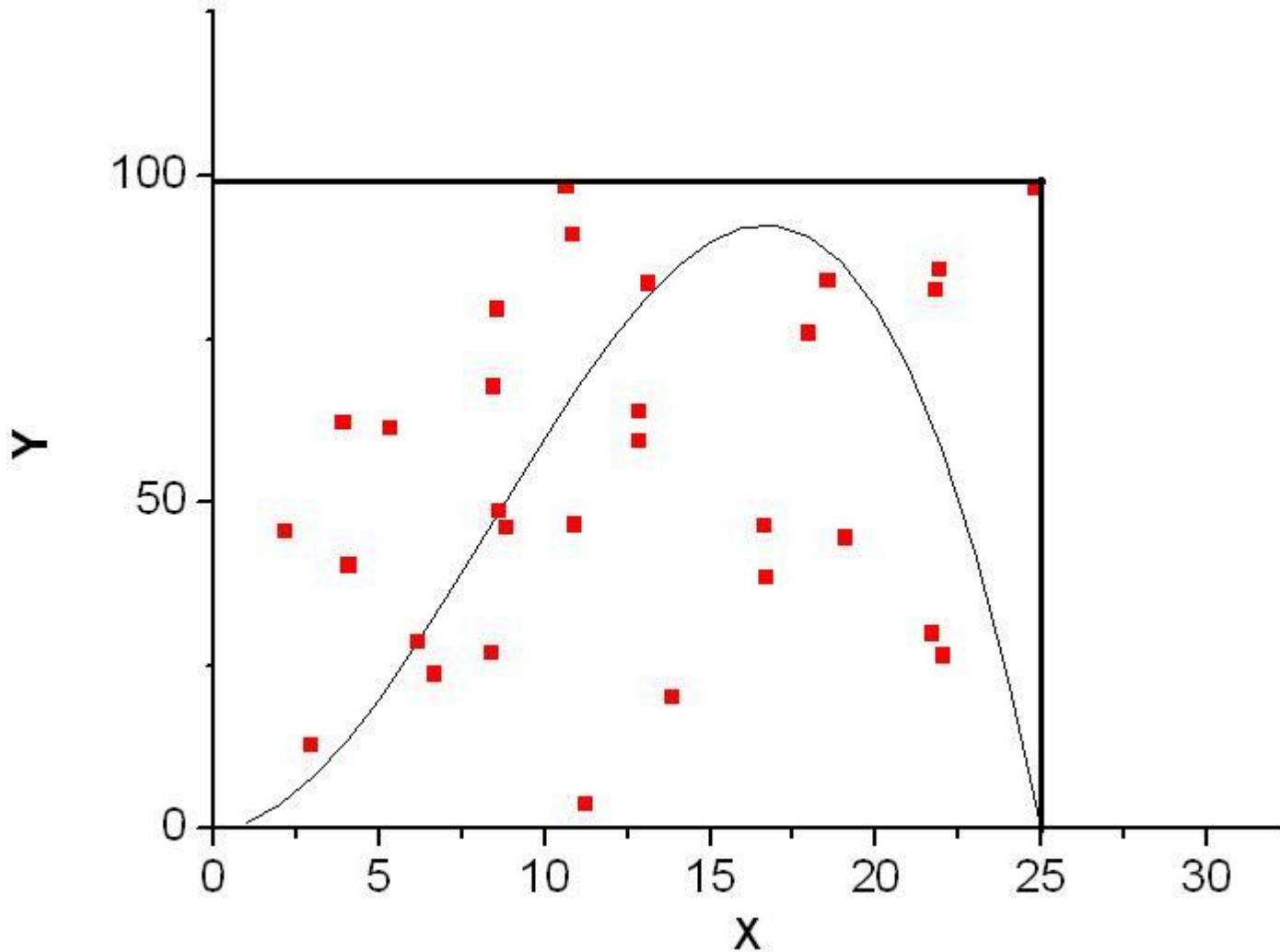


Метод Монте-Карло (ММК)

Название произошло от известного игрового места Монте-Карло. Создатели теории: Метрополис и Улам (дядя Николаса Метрополиса был азартным игроком – поэтому и было предложено именно так назвать этот метод).

Метод был использован для расчета американской атомной бомбы. Метод применялся для расчета различных задач из области физики (например, теория супер струн), химии, социальных процессов. В настоящее время разрабатываются различные параллельные Монте-Карло алгоритмы.

Пример статистического моделирования (вычисление площади фигуры)



Пример статистического моделирования (вычисление интеграла функции)

Требуется вычислить $\int_a^b f(x) dx$

Пусть u – случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[a, b]$. Тогда математическое ожидание $f(u)$ выражается как:

$$\mathbb{E}f(u) = \int_a^b f(x)\varphi(x) dx \quad , \text{ где } \varphi(x) \text{ – плотность распределения}$$

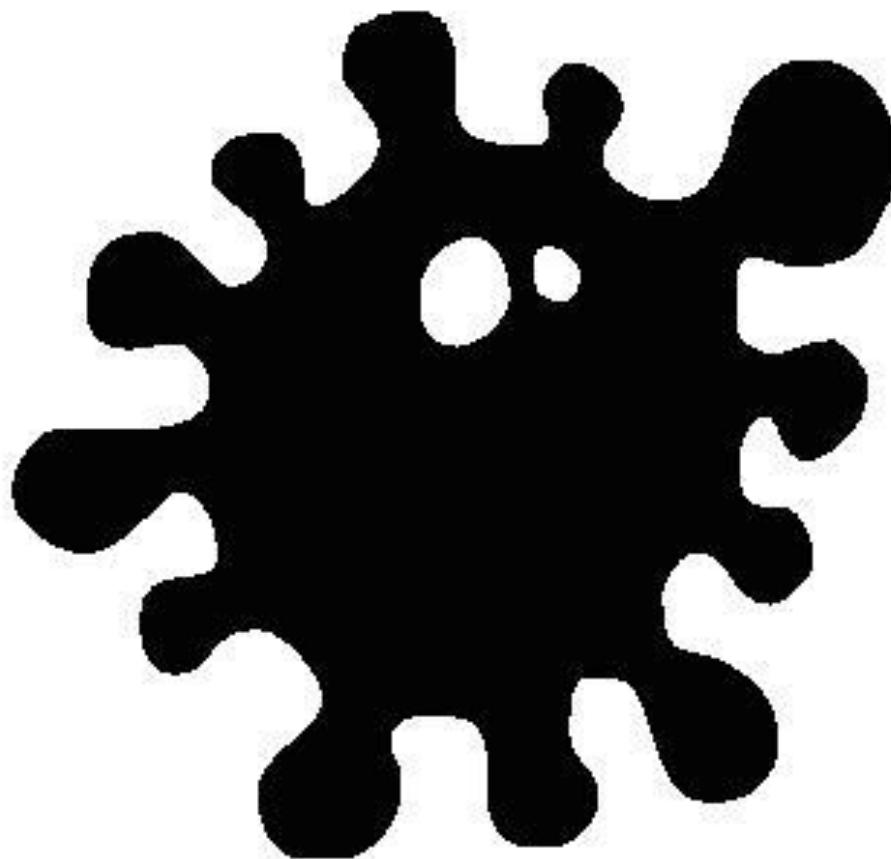
величины u , $\varphi(x) = 1/(b-a)$ на участке $[a, b]$

Искомая величина будет: $\int_a^b f(x) dx = (b - a)\mathbb{E}f(u)$

Среднее выборочное $f(u_i)$: $\mathbb{E} f(u) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(u_i)$

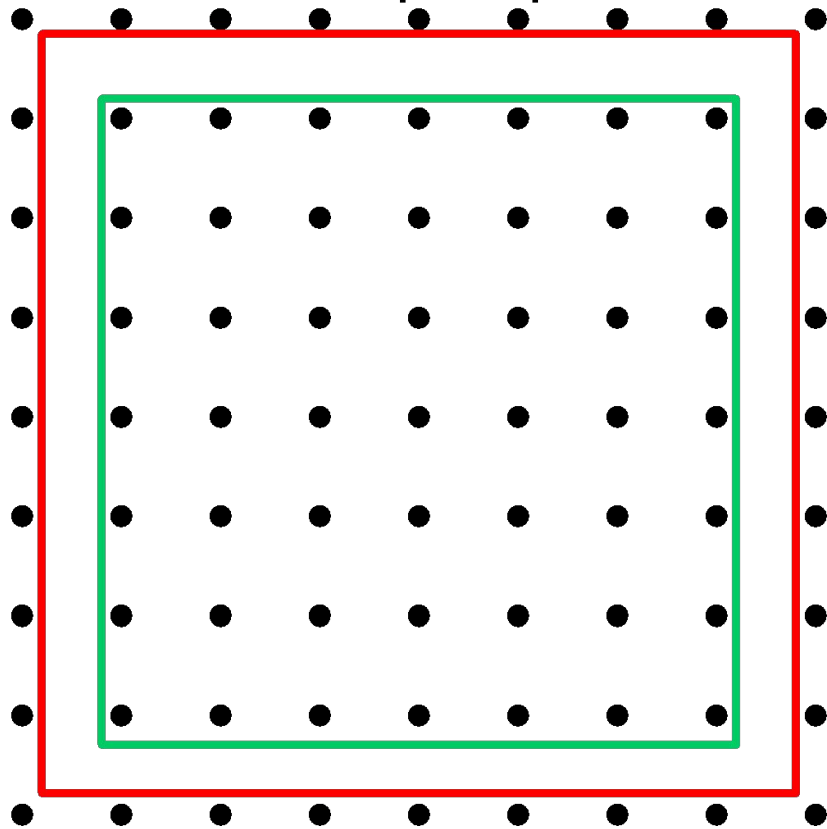
В итоге: $\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b - a}{N} \sum_{i=1}^N f(u_i)$

**Задача для которой метод Монте-Карло
незаменим
(требуется найти площадь такой фигуры)**

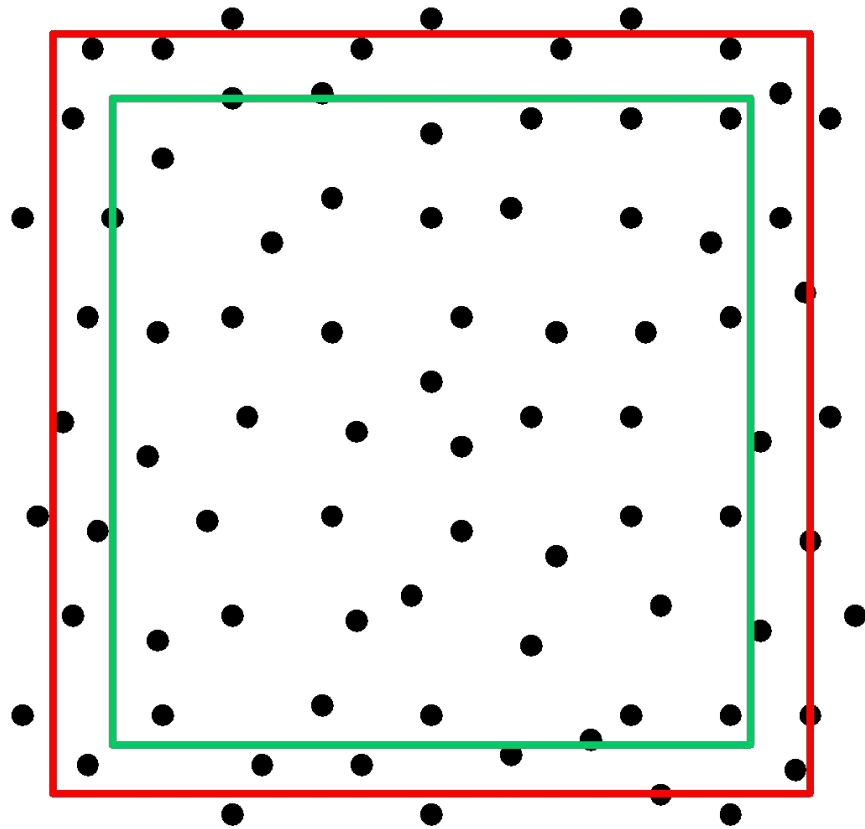


Обоснование необходимости метода Монте-Карло

Фиксированные точки
Фазового пространства



Метод Монте-Карло



уровни (иерархия)

моделирования вычислительной системы

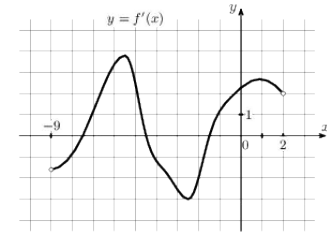
- **Системный (ESL - Electronic System Level)**
- **Язык регистровых передач (RTL – Register Translate Level)**
- **Логический уровень**
- **Схемный уровень**

Содержание курса

Вводная часть

D-схема моделирования (непрерывные модели)

- Непрерывное моделирование
- Численные методы решения D-модели



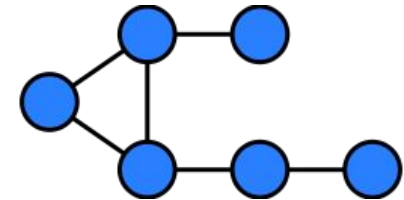
F- схема моделирования (автоматная модель)

- Абстрактный и структурный автоматы
- Декомпозиция автомата



N - схема моделирования (графовые модели)

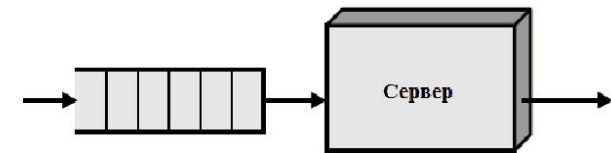
- Граф как основа N-схемы моделирования
- Сеть Петри



P-схема (дискретные стохастические модели)

Q - схема моделирования (непрерывные стохастические модели)

- Непрерывные сети Маркова
- Вероятностный поток
- Системы массового обслуживания



Обработка результатов моделирования

- Интерполяция
- Аппроксимация
- Исследование операций (кратко)

Список литературы

1. Зарубин В.С. Математическое моделирование в технике: Учеб. для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – 2-е изд., стереотип. – М.: Изд-во МГТУ им. Баумана, 2003. – 496 с. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. XXI, заключительный).
2. Кельтон В., Лоу А. Имитационное моделирование. Классика CS. 3-е изд. Спб. Питер; Киев: Издательская группа BHV, 2004.
3. Советов Б.Я., Яковлев С.А. Моделирование систем: учеб. для вузов 3-е изд, перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 2001.