

# Системы логических уравнений

**Разбор заданий ЕГЭ (А10,  
В15)**

# Разбор заданий А10

*На числовой прямой даны два отрезка:*

*$P = [20, 50]$  и  $Q = [10, 60]$ . Выберите такой отрезок  $A$ , что формула*

$$( (x \in P) \rightarrow (x \in A) ) \wedge ( (x \in A) \rightarrow (x \in Q) )$$

*тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ . Если таких отрезков несколько, укажите тот, который имеет большую длину.*

1)  $[5, 40]$       2)  $[15, 54]$  3)  $[30, 58]$  4)  $[5, 70]$

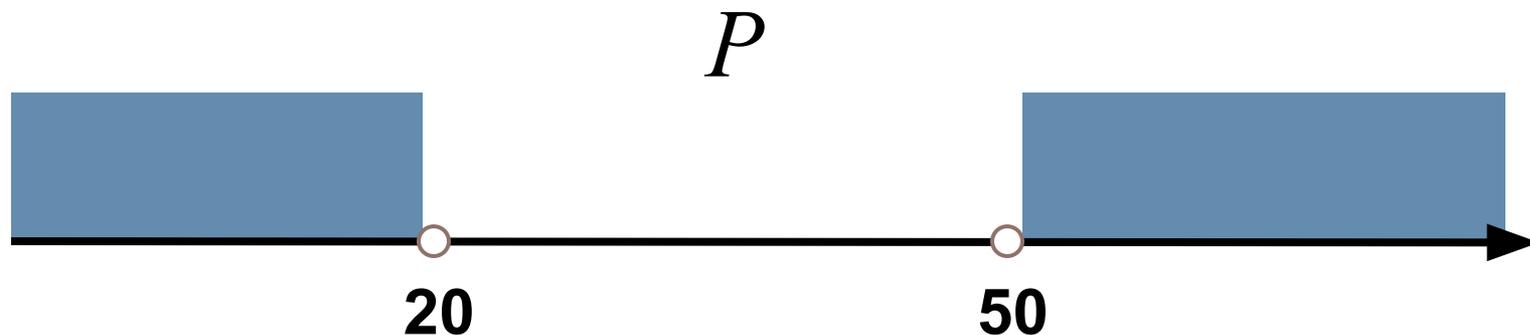
Преобразуем

$$((x \in P) \rightarrow (x \in A)) \wedge ((x \in A) \rightarrow (x \in Q)) =$$

$$\overset{1}{(x \notin P) \vee (x \in A)} \wedge ((x \notin A) \vee (x \in Q)) =$$

$\overset{1}{}$  Рассмотрим первую часть уравнения, учитывая  $P = [20, 50]$

$$(x \notin P) \vee (x \in A) = 1$$



отрезок  $A$  должен полностью перекрывать отрезок  $P$

1)  $[5, 40]$

2)  $[15, 54]$

3)  $[30, 58]$

4)  $[5, 70]$

Рассмотрим вторую часть уравнения, учитывая  $Q = [10, 60]$

$$(x \notin A) \vee (x \in Q) = 1$$



Заметим, что во второй части уравнения  $(x \notin A)$ , следовательно  $A$  находится внутри отрезка  $[10, 60]$

2)  $[15, 54]$

4)  $[5, 70]$

Ответ: 2

На числовой прямой даны два отрезка:

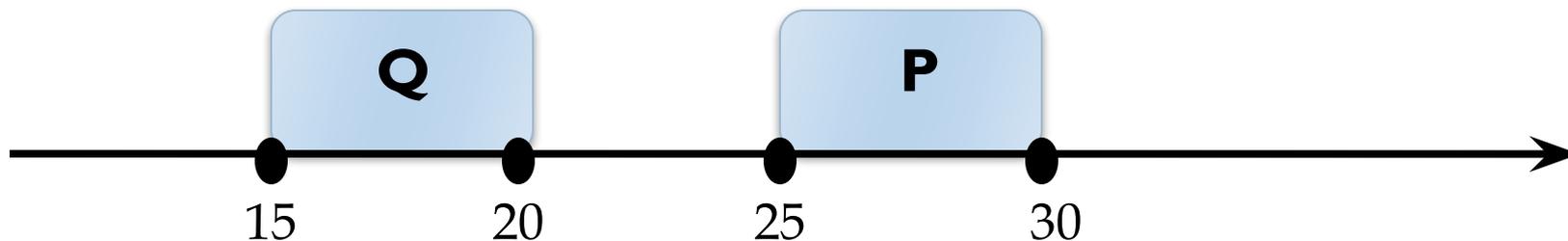
$P = [25, 30]$  и  $Q = [15, 20]$ . Выберите такой отрезок  $A$ , что формула

$$((x \in A) \rightarrow (x \in P)) \vee (x \in Q)$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .

- 1)  $[10, 15]$     2)  $[12, 30]$     3)  $[20, 25]$     4)  $[26, 28]$

$$((x \notin A) \vee (x \in P)) \vee (x \in Q) = 1$$



Ответ: 4

На числовой прямой даны три отрезка:

$P = [10, 50]$ ,  $Q = [15, 20]$  и  $R = [30, 80]$ . Выберите такой

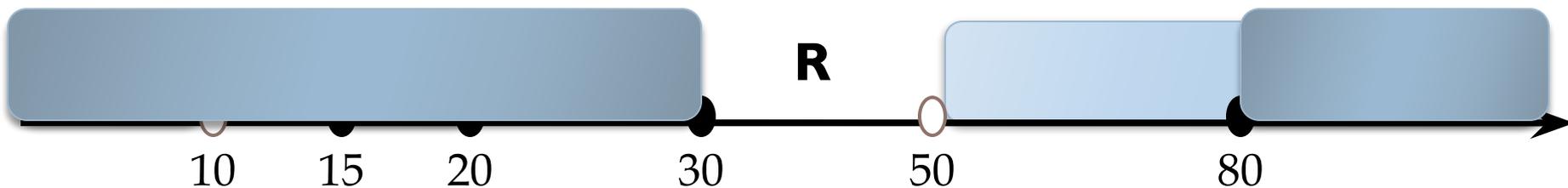
отрезок  $A$ , что формула

$$((x \in P) \rightarrow (x \in Q)) \vee ((x \notin A) \rightarrow (x \notin R))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .

1)  $[10, 25]$  2)  $[25, 50]$  3)  $[40, 60]$  4)  $[50, 80]$

$$((x \notin P) \vee (x \in Q)) \vee ((x \in A) \vee (x \notin R)) = 1$$



**Ответ: 2**



# Самостоятельная работа

---

1. На числовой прямой даны два отрезка:  $P=[5,15]$  и  $Q=[11,21]$ . Выберите такой отрезок  $A$ , что формула

$$((x \in A) \rightarrow \neg(x \in Q)) \vee (x \in P)$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .

$$1[4, 34]$$

$$2[4, 24]$$

$$3[4, 14]$$

$$4[14, 24]$$



2. На числовой прямой даны два отрезка:  $P=[10,30]$  и  $Q=[20,40]$ .

Выберите такой отрезок  $A$ , что формула

$$(x \in A) \rightarrow ((x \in P) \equiv (x \in Q))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .

$$1[11,19]$$

$$2[21,29]$$

$$3[31,39]$$

$$4[9,41]$$



3. На числовой прямой даны два отрезка:  
 $P=[20,30]$  и  $Q=[10,40]$ . Выберите такой отрезок  
 $A$ , что формула  
 $((x \in P) \rightarrow (x \in A)) \wedge ((x \in A) \rightarrow (x \in Q))$   
тождественно истинна, то есть принимает  
значение 1 при любом значении переменной  $x$ .

1[8,31]

2[18,31]

3[8,41]

4[18,41]



# Разбор заданий В15

Решить **систему** уравнений – это значит найти такие значения переменных, которые обращают **КАЖДОЕ** уравнение системы в верное равенство.


$$\begin{cases} x_1 \equiv x_2 + x_3 \equiv x_4 = 1 \\ x_3 \equiv x_4 + x_5 \equiv x_6 = 1 \\ x_5 \equiv x_6 + x_7 \equiv x_8 = 1 \\ x_7 \equiv x_8 + x_9 \equiv x_{10} = 1 \end{cases}$$


$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} + \overline{(x_3 \cdot x_4 + x_3 \cdot \overline{x_4})} = 1 \\ x_3 \cdot x_4 + \overline{x_3} \cdot \overline{x_4} + \overline{(x_5 \cdot x_6 + x_5 \cdot \overline{x_6})} = 1 \\ x_5 \cdot x_6 + \overline{x_5} \cdot \overline{x_6} + \overline{(x_7 \cdot x_8 + x_7 \cdot \overline{x_8})} = 1 \\ x_7 \cdot x_8 + \overline{x_7} \cdot \overline{x_8} + \overline{(x_9 \cdot x_{10} + x_9 \cdot \overline{x_{10}})} = 1 \end{cases}$$

# *Сколько различных решений имеет система уравнений*

---

$$\neg x_1 \vee x_2 = 1$$

$$\neg x_2 \vee x_3 = 1$$

...

$$\neg x_9 \vee x_{10} = 1$$

*где  $x_1, x_2, \dots, x_{10}$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.*

---



$$\neg X_1 \vee X_2 = 1$$

$$\neg X_2 \vee X_3 = 1$$

$$\neg X_3 \vee X_4 = 1$$

...

$$\neg X_9 \vee X_{10} = 1$$

Кроме  
пар  
(1,0)

	Дерево значений переменных	Количество решений
<b>X1</b>		2
<b>X2</b>		3
<b>X3</b>		4
<b>X4</b>		5
<b>X5</b>		6
<b>X6</b>		7
<b>X7</b>		8
<b>X8</b>		9
<b>X9</b>		10
<b>X10</b>		11

Ответ: ||

Продолжите ряд:

1	2	1
2	4	2
3	6	4
5	10	7
8	16	12
13	26	20
21	42	33
34	68	54
55	110	88
89	178	143
		232

Последовательность  
Фибоначчи +1

*Сколько различных решений имеет система уравнений:*

$$(X_1 \equiv X_2) \vee (X_2 \equiv X_3) = 1$$

$$(X_2 \equiv X_3) \vee (X_3 \equiv X_4) = 1$$

...

$$(X_8 \equiv X_9) \vee (X_9 \equiv X_{10}) = 1$$

*где  $x_1, x_2, \dots, x_{10}$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.*



$(X1 \equiv X2) \vee (X2 \equiv X3) = 1$   
 $(X2 \equiv X3) \vee (X3 \equiv X4) = 1$   
 ...  
 $(X8 \equiv X9) \vee (X9 \equiv X10) = 1$

A	B	$A \equiv B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

	Дерево значений переменных	Количество комбинаций
X1		2
X2		4
X3		6
X4		10
X5		16
X6		26
X7		42
X8		68
X9		110
X10		178

**Ответ: 178**

*Сколько различных решений имеет система уравнений*

$$\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3 = 1$$

$$\neg x_2 \vee x_3 \vee x_4 = 1$$

...

$$\neg x_8 \vee x_9 \vee x_{10} = 1$$

*где  $x_1, x_2, \dots, x_{10}$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.*



$$\neg X_1 + X_2 + X_3 = 1$$

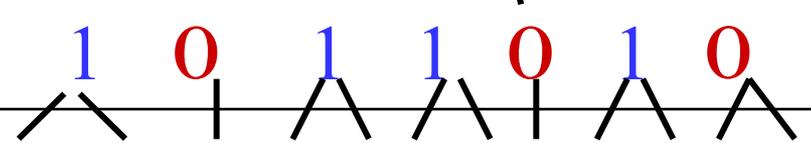
$$\neg X_2 + X_3 + X_4 = 1$$

...

$$\neg X_8 + X_9 + X_{10} = 1$$

Дерево значений переменных

Количество комбинаций

	Дерево значений переменных	Количество комбинаций
<b>X1</b>		2
<b>X2</b>		4
<b>X3</b>		7
<b>X4</b>	 1 0 1 1 0 1 0 1 1 0 1 0	12
<b>X5</b>		20
<b>X6</b>		33
<b>X7</b>		54
<b>X8</b>		88
<b>X9</b>		143
<b>X10</b>		232

Кроме  
(1, 0, 0)

Ответ: 232

# Системы логических уравнений с ограничениями

*Сколько различных решений имеет система уравнений:*

$$\neg(X1 \equiv X2) \vee (X2 \equiv X3)=1$$

$$\neg(X2 \equiv X3) \vee (X3 \equiv X4)=1$$

$$\neg(X3 \equiv X4) \vee (X4 \equiv X5)=1$$

$$\neg(X4 \equiv X5) \vee (X5 \equiv X6)=1$$

...

$$\neg(X8 \equiv X9) \vee (X9 \equiv X10)=1$$

$$X4 \equiv X5=1,$$

*где  $x_1, x_2, \dots, x_9, x_{10}$  – логические переменные?*

*В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений  $x_1, x_2, \dots, x_9$ , при которых выполнена данная система равенств. В качестве ответа вам нужно указать количество таких наборов.*



$$\neg(X1 \equiv X2) \vee (X2 \equiv X3) = 1$$

$$\neg(X2 \equiv X3) \vee (X3 \equiv X4) = 1$$

$$\neg(X3 \equiv X4) \vee (X4 \equiv X5) = 1$$

$$\neg(X4 \equiv X5) \vee (X5 \equiv X6) = 1$$

...

$$\neg(X8 \equiv X9) \vee (X9 \equiv X10) = 1$$

$$X4 \equiv X5 = 1$$

	Дерево значений переменных	Количество комбинаций
<b>X1</b>		2
<b>X2</b>		4
<b>X3</b>		6
<b>X4</b>		8
<b>X5</b>		8
<b>X6</b>		8
<b>X7</b>		8
<b>X8</b>		8
<b>X9</b>		8
<b>X10</b>		8

Кроме троек  
(1,1,0)  
(0,0,1)

Ответ: 8

# Системы логических уравнений с ограничениями

*Сколько различных решений имеет система уравнений:*

$$(x_2 \equiv x_1) \vee (x_2 \equiv x_3) = 1$$

$$(x_3 \equiv x_1) \vee (x_3 \equiv x_4) = 1$$

...

$$(x_9 \equiv x_1) \vee (x_9 \equiv x_{10}) = 1$$

$$(x_{10} \equiv x_1) = 0,$$

*где  $x_1, x_2, \dots, x_9, x_{10}$  – логические переменные?*

*В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений  $x_1, x_2, \dots, x_9$ , при которых выполнена данная система равенств. В качестве ответа вам нужно*

	Решения	Количество о решений	Из уравнения $x_{10} \equiv x_1 = 0$
X1	1                      0	2	следует, что переменные X1 и X10 должны иметь разные значения.
X2	1            0            0            1	4	
X3	1    0    0            0            1    1	6	
X4	1    0    0    0            0    1    1    1	8	
X5	1    0    0    0    0            0    1    1    1    1	10	
X6		12	Одинаковые значения переменные X1 и X10 имеют только на двух наборах: <b>(111...1)</b> и <b>(000...0)</b> .
X7	$(x_2 \equiv x_1) \vee (x_2 \equiv x_3)=1$ $(x_3 \equiv x_1) \vee (x_3 \equiv x_4)=1$ ... $(x_9 \equiv x_1) \vee (x_9 \equiv x_{10})=1$	14	
X8		16	
X9		18	
X10		20	

Количество решений системы  
уравнений: **20-2=18**

Сколько различных решений имеет система уравнений

$$\neg(x_1 \equiv x_2) \wedge \neg(x_2 \equiv x_3) = 1$$

$$\neg(x_2 \equiv x_3) \wedge \neg(x_3 \equiv x_4) = 1$$

...

$$\neg(x_7 \equiv x_8) \wedge \neg(x_8 \equiv x_9) = 1$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_9$  – логические переменные?

В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений  $x_1, x_2, \dots, x_9$ , при которых выполнена данная система равенств. В качестве ответа вам нужно указать количество таких наборов.

Ответ: 2

*Сколько различных решений имеет система уравнений:*

$$\begin{aligned} (x_1 \rightarrow x_2) \wedge (x_2 \rightarrow x_3) \wedge (x_3 \rightarrow x_4) \wedge (x_4 \rightarrow x_5) &= 1 \\ (y_1 \rightarrow y_2) \wedge (y_2 \rightarrow y_3) \wedge (y_3 \rightarrow y_4) \wedge (y_4 \rightarrow y_5) &= \\ &1, \end{aligned}$$

*где  $x_1, x_2, \dots, x_5, y_1, y_2, \dots, y_5$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.*

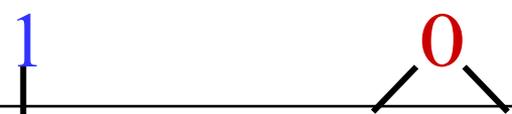
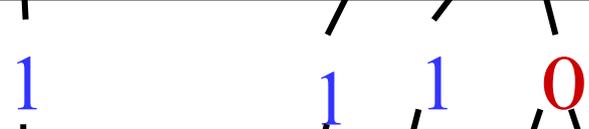
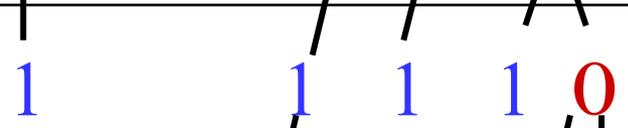
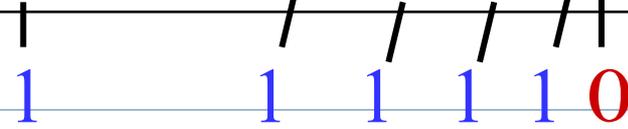
---



# Рассмотрим первое уравнений системы:

$$(x_1 \rightarrow x_2) \wedge (x_2 \rightarrow x_3) \wedge (x_3 \rightarrow x_4) \wedge (x_4 \rightarrow x_5) = 1$$

Кроме  
пары  
(1,0)

	Дерево значений переменных	Количество комбинаций
<b>x1</b>		2
<b>x2</b>		3
<b>x3</b>		4
<b>x4</b>		5
<b>x5</b>		6

$$(x_1 \rightarrow x_2) \wedge (x_2 \rightarrow x_3) \wedge (x_3 \rightarrow x_4) \wedge (x_4 \rightarrow x_5) = 1$$

$$(y_1 \rightarrow y_2) \wedge (y_2 \rightarrow y_3) \wedge (y_3 \rightarrow y_4) \wedge (y_4 \rightarrow y_5) = 1$$

X1	X2	X3	X4	X5
0	0	0	0	0
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	1	1	1	1

Ответ: 36

*уравнений:*

$$(x_1 \rightarrow x_2) \wedge (x_2 \rightarrow x_3) \wedge (x_3 \rightarrow x_4) \wedge (x_4 \rightarrow x_5) = 1$$

$$(y_1 \rightarrow y_2) \wedge (y_2 \rightarrow y_3) \wedge (y_3 \rightarrow y_4) \wedge (y_4 \rightarrow y_5) = 1$$

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$y$
0	0	0	0	0	6 строк
0	0	0	0	1	5 строк
0	0	0	1	1	5 строк
0	0	1	1	1	5 строк
0	1	1	1	1	5 строк
1	1	1	1	1	5 строк

Ответ: 31

Сколько различных решений имеет система уравнений

$$(\neg X_1 \rightarrow X_2) \wedge (\neg X_2 \rightarrow X_3) \wedge (\neg X_3 \rightarrow X_4) \wedge (\neg X_4 \rightarrow X_5) = 1$$

$$(\neg Y_1 \rightarrow Y_2) \wedge (\neg Y_2 \rightarrow Y_3) \wedge (\neg Y_3 \rightarrow Y_4) \wedge (\neg Y_4 \rightarrow Y_5) = 1$$

$$X_1 \vee Y_1 = 0$$

Так как  $X_1 \vee Y_1 = 0$ , то  $X_1 = 0$  и  $Y_1 = 0$ .

x1	x2	x3	x4	x5
0	1	0	1	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
0	1	1	1	1

Ответ: 25

Сколько различных решений имеет система уравнений?

$$(x_1 \rightarrow x_2) \wedge (x_2 \rightarrow x_3) \wedge (x_3 \rightarrow x_4) \wedge (x_4 \rightarrow x_5) \wedge (x_5 \rightarrow x_6) = 1$$
$$(x_1 \rightarrow y_1) \wedge (x_2 \rightarrow y_2) \wedge (x_3 \rightarrow y_3) \wedge (x_4 \rightarrow y_4) \wedge (x_5 \rightarrow y_5) \wedge (x_6 \rightarrow y_6) = 1$$

x1	x2	x3	x4	x5	x6	y
0	0	0	0	0	0	64 строки
0	0	0	0	0	1	32 строки
0	0	0	0	1	1	16 строки
0	0	0	1	1	1	8 строки
0	0	1	1	1	1	4 строки
0	1	1	1	1	1	2 строки
1	1	1	1	1	1	1 строка

Ответ: 127

*Сколько различных решений имеет система уравнений?*

$$(x_1 \rightarrow x_2) \wedge (x_2 \rightarrow x_3) \wedge (x_3 \rightarrow x_4) = 1$$

$$(y_1 \rightarrow y_2) \wedge (y_2 \rightarrow y_3) \wedge (y_3 \rightarrow y_4) = 1$$

$$(\neg y_1 \vee x_1) \wedge (\neg y_2 \vee x_2) \wedge (\neg y_3 \vee x_3) \wedge (\neg y_4 \vee x_4) = 1$$

*где  $x_1, x_2, \dots, x_4, y_1, y_2, \dots, y_4$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.*

x1	x2	x3	x4	y
0	0	0	0	1 строка
0	0	0	1	2 строки
0	0	1	1	3 строки
0	1	1	1	4 строки
1	1	1	1	5 строк

**Ответ: 15**

# СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

- Матвеевко Л.В., презентация, г. Брянск , 2012
- Поляков К.Ю. Логические уравнения // Информатика, № 14, 2011, с. 30-35.
- <http://kpolyakov.narod.ru/download/BI5.doc>
- Демидова М.В. Решение заданий типа В10 КИМов ЕГЭ по информатике 2011 года посредством построения дерева.  
<http://www.it-n.ru/attachment.aspx?id=123369>
- <http://ege.yandex.ru/informatics>
- <http://ege-go.ru/zadania/grb/b15/>
- Демовариант ЕГЭ по информатике 2012 // ФИПИ, 2011.



# Тестирование

<https://ege.yandex.ru/informatics/>