Тема 2. Аналіз показників розвитку фінансової системи

План

3.1 Моделювання тенденції часового ряду: згладжування та аналітичне вирівнювання.

3.2 Моделювання сезонних та циклічних коливань.

3.3 Сезонність, циклічність (декомпозиційний аналіз).

3.4 Методи фільтрації сезонної компоненти.

3.5 Фільтрація сезонної компоненти за допомогою індексу сезонності.

3.6 Метод декомпозиції часового ряду.

Загальна лінійна економетрична модель

$$\mathrm{M}\left(\mathrm{Y} \mid X_1, X_2, \ldots, X_m\right) = \alpha\left(X_1, X_2, \ldots, X_m\right),$$

$$\begin{gathered}
y_1 = \beta_0 + \beta_1 x_{11} + \beta_2 x_{12} + \ldots + \beta_j x_{1j} + \ldots + \beta_m x_{1m} + \varepsilon_1, \\
y_2 = \beta_0 + \beta_1 x_{21} + \beta_2 x_{22} + \ldots + \beta_j x_{2j} + \ldots + \beta_m x_{2m} + \varepsilon_2, \\
\vdots \\
y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \ldots + \beta_j x_{ij} + \ldots + \beta_m x_{im} + \varepsilon_i, \\
\vdots \\
y_n = \beta_0 + \beta_1 x_{n1} + \beta_2 x_{n2} + \ldots + \beta_j x_{nj} + \ldots + \beta_m x_{nm} + \varepsilon_n,
\end{gathered}$$

$$\vec{Y} = X \cdot \vec{\beta} + \vec{\varepsilon},$$

$$\vec{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1j} & \dots & x_{1m} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2j} & \dots & x_{2m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{i1} & x_{i2} & \dots & x_{ij} & \dots & x_{im} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nj} & \dots & x_{nm} \end{pmatrix}, \quad \vec{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_j \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}, \quad \vec{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_i \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}.$$

Емпірична модель множинної лінійної регресії

$$
\begin{aligned}
y_1 &= \beta_0^* + \beta_1^* x_{11} + \beta_2^* x_{12} + \beta_3^* x_{13} + \ldots + \beta_m^* x_{1m} + e_1, \\
y_2 &= \beta_0^* + \beta_1^* x_{21} + \beta_2^* x_{22} + \beta_3^* x_{23} + \ldots + \beta_m^* x_{2m} + e_2, \\
y_3 &= \beta_0^* + \beta_1^* x_{31} + \beta_2^* x_{32} + \beta_3^* x_{33} + \ldots + \beta_m^* x_{3m} + e_3, \\
&\vdots \\
y_n &= \beta_0^* + \beta_1^* x_{n1} + \beta_2^* x_{n2} + \beta_3^* x_{n3} + \ldots + \beta_m^* x_{nm} + e_n,
\end{aligned}
$$

$$\vec{y} = X \cdot \vec{\beta}^{*} + \vec{e},$$

$$\vec{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1j} & \dots & x_{1m} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2j} & \dots & x_{2m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{i1} & x_{i2} & \dots & x_{ij} & \dots & x_{im} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nj} & \dots & x_{nm} \end{pmatrix}, \quad \vec{\beta}^{*} = \begin{pmatrix} \beta_0^* \\ \beta_1^* \\ \vdots \\ \beta_j^* \\ \vdots \\ \beta_m^* \end{pmatrix}, \quad \vec{\varepsilon} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}.$$

Умови Гаусса-Маркова

1. $M[e_i] = 0$
2. $D[e_i] \to \min$
3. *Відсутність систематичного зв'язку між значеннями випадкового збудника у будь-яких двох спостереженнях.*
4. *Випадковий збудник має бути розподілений незалежно від пояснюючих змінних.*

Оператор оцінювання 1МНК

$$X = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_m\}$$

$$a = (X^{\mathrm{T}}X)^{-1}(X^{\mathrm{T}}y)$$

$$a = (a_0, a_1, a_2, ..., a_m)^{\mathrm{T}}$$

Верифікація моделі .

$$S_u^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i^2$$

$$R^2 = 1 - \frac{S_u^2}{S_y^2}$$

$$S_y^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2$$

$$\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$\overline{R}^2 = 1 - \frac{\sigma_u^2}{\sigma_y^2}$$

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2.$$

$$\overline{R}^2 = 1 - (1 - R^2)\frac{n-1}{n-m-1}$$

$$R^2 = \frac{\left(\sum (y_i - \overline{y})(\hat{y}_i - \overline{y})\right)^2}{\sum (y_i - \overline{y})^2 \sum (\hat{y}_i - \overline{y})^2}.$$

$$R^2 = \frac{\sum (\hat{y}_i - \overline{y})^2}{\sum (y_i - \overline{y})^2}$$

$$R = \sqrt{R^2} \quad (\bar{R} = \sqrt{\bar{R}^2})$$

$$H_0 : a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0.$$

$$F_{\text{експ}} = \frac{R^2}{1 - R^2} \cdot \frac{n - m - 1}{m}$$

$$t_{\text{експ}} = \frac{R\sqrt{n - m - 1}}{\sqrt{1 - R^2}} \qquad |t| > t_{\text{табл}}$$

$$H_0 : a_j = 0 \quad H_A : a_j \neq 0$$

$$t_j = \frac{a_i}{\sqrt{\sigma_u^2 c_{jj}}} = \frac{a_j}{S_{a_j}}$$

$$\left(a_j - t_{\text{табл}} \sqrt{\sigma_u^2 c_{jj}}; \quad a_j + t_{\text{табл}} \sqrt{\sigma_u^2 c_{jj}}\right)$$

$$t_{\text{табл}} = t_{\alpha/2}(n - m - 1)$$

Зведення нелінійних економетричних моделей до лінійного вигляду.

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_m x_m + u$$

$$y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_m^{a_m}$$

$$\ln y = \ln a_0 + a_1 \ln x_1 + a_2 \ln x_2 + \ldots + a_m \ln x_m + u$$

$$y = a_0 a_1^{x_1} a_2^{x_2} \ldots a_m^{x_m}$$

$$\ln y = \ln a_0 + x_1 \ln a_1 + x_2 \ln a_2 + \ldots + x_m \ln a_m$$

$$y = a_0 + \frac{a_1}{x_1} + \frac{a_2}{x_2} + \ldots + \frac{a_m}{x_m}$$

$$y = a_0 + a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \ldots + a_m x_m^2$$

$$z_i = \frac{1}{x_i} \qquad z_i = x_i^2, \; i = 1, 2, \ldots, m,$$

$$y = a_0 + a_1 z_1 + a_2 z_2 + \ldots + a_m z_m$$

$$\operatorname{cov}(\varepsilon_i \cdot \varepsilon_j) = \begin{cases} 0, \; i \neq j \\ \sigma_{\varepsilon}^{2} = const, \; i = j \end{cases}$$

Перша група моделей, для яких не виконуються передумови Гаусса-Маркова

$$M(\varepsilon_i) = 0, \qquad i = \overline{1,n}$$

$$\operatorname{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \begin{cases} 0, & npu\ i \neq j, \\ \sigma^2_{\varepsilon_i} \neq const, & npu\ i = j,\ i = \overline{1,n} \end{cases}$$

$$\operatorname{cov}(\vec{\varepsilon} \cdot \vec{\varepsilon}') = \begin{pmatrix} \sigma_{\varepsilon_1}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_{\varepsilon_2}^2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots\cdot & \cdot\cdot & \cdots\cdot \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{\varepsilon_n}^2 \end{pmatrix}$$

Друга група моделей, для яких не виконуються передумови Гаусса-Маркова

$$M(\varepsilon_i) = 0, \qquad i = \overline{1,n}$$

$$\operatorname{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \begin{cases} k_{ij}, & npu\ i \neq j, \\ \sigma^2_{\varepsilon_i} = \sigma^2_{\varepsilon} = const, & npu\ i = j,\ i = \overline{1,n} \end{cases}$$

$$k_{ij} = M(\varepsilon_i \cdot \varepsilon_j) - M(\varepsilon_i) \cdot M(\varepsilon_j) = M(\varepsilon_i \cdot \varepsilon_j) \neq 0$$

$$\operatorname{cov}(\vec{\varepsilon} \cdot \vec{\varepsilon}\,') = \begin{pmatrix} \sigma_{\varepsilon}^{2} & k_{12} & k_{13} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & \sigma_{\varepsilon}^{2} & k_{23} & \cdots & k_{2n} \\ k_{31} & k_{32} & \sigma_{\varepsilon}^{2} & \cdots & k_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & k_{n3} & \cdots & \sigma_{\varepsilon}^{2} \end{pmatrix}$$

Третя група моделей, для яких не виконуються передумови Гаусса-Маркова

$$M(\varepsilon_i) = 0, \qquad i = \overline{1,n}$$

$$\operatorname{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \begin{cases} k_{ij}, & npu\ i \neq j, \\ \sigma_{\varepsilon_i}^2 \neq const, & npu\ i = j,\ i = \overline{1,n} \end{cases}$$

Перевірка на наявність гетероскедастичності залишків

Тест Голдфельда-Квандта

$$\sigma^2_{\varepsilon_1} = \sigma^2_{\varepsilon 2} = \ldots = \sigma^2_{\varepsilon_{\grave{o}}}$$

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y	14,87	27,54	11,49	11,69	11,46	11,38	10,76	11,07	10,60	9,73
X	102,67	100,00	85,00	75,00	70,09	60,00	57,35	54,00	52,30	52,00
№ п/п	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Y	9,48	8,44	8,43	8,19	7,04	6,89	6,04	5,26	5,24	4,39
X	47,75	46,73	43,42	41,30	41,17	41,04	33,91	33,70	30,01	30,00
№ п/п	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Y	3,47	2,49	2,48	1,41	1,39	1,00	0,53	0,20	0,18	0,15
X	26,82	24,64	23,37	23,82	22,26	20,50	15,50	14,20	13,54	13,41

$$c = \frac{4 \cdot n}{15} = 8 \qquad n_1 = \frac{n - c}{2} = \frac{30 - 8}{2} = 11$$

№ п/п	Модель 1: $y_i^* = -0{,}116 + 0{,}187x_i$					Модель 2: $y_i^* = -3{,}246 + 0{,}234x_i$				
	y_i	x_i	y_i^*	e_i	e_i^2	y_i	x_i	y_i^*	e_i	e_i^2
1	14,87	102,67	19,08	-4,21	17,688	4,39	30,00	3,78	0,61	0,375
2	27,54	100,00	18,58	8,96	80,343	3,47	26,82	3,03	0,44	0,191
3	11,49	85,00	15,77	-4,28	18,342	2,49	24,64	2,52	-0,03	0,001
4	11,69	75,00	13,90	-2,21	4,899	1,41	23,82	2,33	-0,92	0,848
5	11,46	70,09	12,99	-1,53	2,328	2,48	23,37	2,23	0,25	0,065
6	11,38	60,00	11,10	0,28	0,079	1,39	22,26	1,97	-0,58	0,331
7	10,76	57,35	10,60	0,16	0,024	1,00	20,50	1,55	-0,55	0,307
8	11,07	54,00	9,98	1,09	1,192	0,53	15,50	0,38	0,15	0,022
9	10,60	52,30	9,66	0,94	0,883	0,20	14,20	0,08	0,12	0,015
10	9,73	52,00	9,60	0,13	0,016	0,18	13,54	-0,08	0,26	0,065
11	9,48	47,75	8,81	0,67	0,449	0,15	13,41	-0,11	0,26	0,066
Σ					126,243					2,285

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n_1} e_i^2 \qquad S_3 = \sum_{i=1}^{n_2} e_i^2$$

$$F^{*}_{\tilde{n}\ddot{\imath}} = \begin{cases} \dfrac{S_3 / n_3}{S_1 / n_1}, & \ddot{y}\hat{e}\grave{u}\hat{\imath} \quad S_3 > S_1; \\ \dfrac{S_1 / n_1}{S_3 / n_3}, & \ddot{y}\hat{e}\grave{u}\hat{\imath} \quad S_1 > S_3. \end{cases}$$

$$F^{*}_{\tilde{n}\ddot{\imath}} = \frac{126{,}243}{2{,}285} = 55{,}253 > 3.18$$

Тест Глейзера

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
e_i	7,96	-5,29	-2,40	-4,80	-1,55	0,58	1,59	0,54	1,49	0,69
$\|e_i\|$	7,96	5,29	2,40	4,80	1,55	0,58	1,59	0,54	1,49	0,69
№ п/п	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
e_i	1,37	0,55	1,27	1,49	0,37	0,25	0,97	0,23	1,02	0,17
$\|e_i\|$	1,37	0,55	1,27	1,49	0,37	0,25	0,97	0,23	1,02	0,17
№ п/п	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
e_i	-0,05	-0,55	-0,28	-1,45	-1,13	-1,13	-0,51	-0,55	-0,43	-0,43
$\|e_i\|$	0,05	0,55	0,28	1,45	1,13	1,13	0,51	0,55	0,43	0,43

$$R^2 = 0.628, r = 0.792$$

$$s_{\alpha_0^*} = 0,403; \qquad s_{\alpha_1^*} = 0,008;$$

$$t_{\alpha_0^*} = -2,604; \qquad t_{\alpha_1^*} = 6,874.$$

$$t_{\alpha_0^*}, t_{\alpha_1^*} \notin [-2,048; 2,048]$$

Фільтрація сезонної компоненти за допомогою індексу сезонності

$$s_{t+m} = s_t$$

$$n = k \cdot m$$

$$y_{ij} = u_{ij} \cdot I_j + \varepsilon_{ij}$$

$$I_j = \frac{\sum_{i=1}^{k} I_{ij}}{k}$$

$$I_j = \frac{\sum_{i=1}^{k} I_{ij}}{k} 100\ \%$$

$$I_{ij} = \frac{y_{ij}}{\overline{y}_i}$$

$$\overline{y}_i = \frac{\sum_{j=1}^{m} y_{ij}}{m}$$

$$I_{ij} = \frac{\hat{u}_{ij} + \hat{s}_{ij}}{\hat{u}_{ij}} = \frac{\hat{y}_{ij}}{\hat{u}_{ij}}$$

Метод декомпозиції часового ряду

$$s_{ij} = y_t - \tilde{y}_t$$

$$\bar{s}_j = \frac{\sum_{i=1}^{k} s_{ij}}{k}$$

$$\bar{s} = \sum_{j=1}^{m} \bar{s}_j$$

$$\sum_{j=1}^{m} \bar{s}_j = 0$$

$$\sum_{j=1}^{m} \bar{s}_j = m$$

$$\hat{s}_j = \bar{s}_j - \alpha$$

$$\alpha = \bar{s} / m$$

$$\hat{s}_j = \bar{s}_j \cdot \alpha$$

$$\alpha = m / \bar{s}$$

$$\hat{u}_t + \hat{s}_t$$

$$\hat{u}_t \cdot \hat{s}_t$$

Таблиця 1 – Розрахунок оцінок компонент адитивної моделі декомпозиції часового ряду

Рік	Квартали	Обсяги наданих кредитів	Ковзні середні	Сезонна та випадкова компоненти	Оцінка сезонної компоненти	$y_t - \hat{s}_t = v_t + \varepsilon_t$	Експ тренд.	$\hat{v}_t + \hat{s}_t$	$e_t = y_t - \hat{v}_t -$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2001	1	8204,87	-	-	-8204,25	16409,12	17223,88	9019,63	-814,76
	2	14516,38	-	-	-2152,57	16668,95	18896,88	16744,31	-2227,93
	3	21438,80	20626,66	812,14	870,22	20568,58	20732,39	21602,61	-163,81
	4	32451,39	23334,84	9116,55	9486,60	22964,79	22746,18	32232,78	218,61
2002	1	19995,28	25927,47	-5932,19	-8204,25	28199,53	24955,57	16751,32	3243,96
	2	24391,39	29162,73	-4771,34	-2152,57	26543,96	27379,57	25227,00	-835,61
	3	32304,86	32204,44	100,42	870,22	31434,64	30039,01	30909,23	1395,63
	4	47467,42	34636,80	12830,62	9486,60	37980,82	32956,78	42443,38	5024,04
2003	1	29312,93	37684,00	-8371,07	-8204,25	37517,18	36157,96	27953,70	1359,23
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
2007	1	149385,20	162525,80	-13140,60	-8204,25	157589,45	159349,04	151144,79	-1759,59
	2	178661,80	182846,39	-4184,59	-2152,57	180814,37	174827,02	172674,45	5987,35
	3	205494,12	204954,88	539,24	870,22	204623,90	191808,41	192678,63	12815,49
	4	241063,20	228520,62	12542,58	9486,60	231576,60	210439,25	219925,85	21137,35
2008	1	239815,60	250340,88	-10525,28	-8204,25	248019,85	230879,75	222675,50	17140,10
	2	276757,30	266199,76	10557,54	-2152,57	278909,87	253305,69	251153,12	25604,18
	3	281960,70	-		870,22	281090,48	277909,92	278780,13	3180,57
	4	291467,70	-		9486,60	281981,10	304904,01	314390,61	-22922,91
2009	1	326315,86			-8204,25		334520,12		
	2	364860,34			-2152,57		367012,91		
	3	403532,02			870,22		402661,80		
	4	451259,97			9486,60		441773,37		

Таблиця 2 – Розрахунок скоригованих оцінок сезонної компоненти

j / i	1	2	3	4	Середньосезонне значення, $\bar{S}$	Коригувальний коефіцієнт, α
2001	—	—	812,14	9116,55		
2002	-5932,19	-4771,34	100,42	12830,62		
2003	-8371,07	-6305,13	2205,64	9649,71		
2004	-7163,16	-5099,61	1618,65	11765,08		
2005	-9265,64	-4373,29	428,28	9236,57		
2006	-11931,35	-3739,39	562,12	10056,43		
2007	-13140,60	-4184,59	539,24	12542,58		
2008	-10525,28	10557,54	—	—		
Підсумок за j-й квартал	-66329,28	-17915,82	6266,49	75197,54		
Середня оцінка сезонної компоненти для j-го кварталу, $\bar{S}_j$	-8291,16	-2239,48	783,31	9399,69	-347,63	-86,91
Скоригована оцінка сезонної компоненти, $\hat{S}_j$	-8204,25	-2152,57	870,22	9486,60	0,00	