

# Расчет коэффициентов регрессии (МНК)

$$U = \sum_{i=1}^n \xi_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - b_0 - b_1 x_i)^2 = \min$$

$$\left[ \frac{dU}{db_0} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - b_0 - b_1 x_i) = 0 \right.$$

$$\left. \frac{dU}{db_1} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - b_0 - b_1 x_i) x_i = 0 \right]$$

$$\left[ nb_0 + b_1 \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i \right.$$

$$\left. b_0 \sum_{i=1}^n x_i + b_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i x_i \right]$$

$$b_0 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n y_i x_i \sum_{i=1}^n x_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2}$$

$$b_1 = \frac{n \sum_{i=1}^n y_i x_i - \sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2}$$

## Коэффициент корреляции Пирсона

$$R = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\sum_{i=1}^n ((x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}))}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$$

Условия применения коэффициента корреляции Пирсона:

1. Переменные  $x$  и  $y$  должны быть распределены нормально.
2. Переменные  $x$  и  $y$  должны быть измерены в интервальной шкале или шкале отношений.
3. Количество значений в исследуемых переменных  $x$  и  $y$  должно быть одинаковым.

Значение коэффициента корреляции не зависит от масштаба измерения.

Коэффициент корреляции принимает значения от  $-1,0$  (строгая отрицательная корреляция) до  $+1,0$  (строгая положительная корреляция). Значение  $0,0$  означает отсутствие корреляции. Связи между переменными могут быть слабыми и сильными (тесными). Их критерии можно оценивать по различным шкалам, из которых наиболее часто применяют шкалы Чеддока и Е.П.Голубкова

Шкала Чеддока		Шкала Е.П.Голубкова	
<b>R</b>	<b>Интерпретация</b>	<b>R</b>	<b>Интерпретация</b>
0,1 – 0,3	Слабая	0,00 - 0,20	Отсутствует
0,3 – 0,5	Умеренная	0,21 - 0,40	Очень слабая
0,5 – 0,7	Заметная	0,41 - 0,60	Слабая
0,7 – 0,9	Высокая	0,61 - 0,80	Умеренная
0,9 – 1,0	Весьма высокая	0,81 - 1,00	Сильная

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{1}{n(n-2)} \sum_{i=1}^n (y_i - b_0 - b_1 x_i)^2}$$

$$\sigma_{b_0} = \sigma_0 \sqrt{\frac{n \sum_{i=1}^n x_i^2}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2}}$$

$$\sigma_{b_1} = \sigma_0 \sqrt{\frac{n}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2}}$$

$$\Delta b_j = \frac{\sigma_{b_j} t_{P,n-1}}{\sqrt{n}}$$

$$b_j = \bar{b}_j \pm \Delta b_j$$

$$y_i = b_0 + b_1 x_i + b_2 x_i^2$$

$$U = \sum_{i=1}^n \xi_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - b_0 - b_1 x_i - b_2 x_i^2)^2 = \min$$

$$nb_0 + b_1 \sum_{i=1}^n x_i + b_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i$$

$$b_0 \sum_{i=1}^n x_i + b_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 + b_2 \sum_{i=1}^n x_i^3 = \sum_{i=1}^n y_i x_i$$

$$b_0 \sum_{i=1}^n x_i^2 + b_1 \sum_{i=1}^n x_i^3 + b_2 \sum_{i=1}^n x_i^4 = \sum_{i=1}^n y_i x_i^2$$

# Линеаризация зависимостей

$$v = ku + z$$

Вид зависимости	Замены				Ограничения
	v	u	k	z	
Парабола второго (или высшего) порядка $y = ax^2 + b$	y	$x^2$	a	b	
Гипербола $y = \frac{a}{x} + b$	y	$\frac{1}{x}$	a	b	$x \neq 0$
Логарифмическая функция $y = a \ln x + b$	y	$\ln x$	a	b	$x > 0$
Показательная функция $y = ba^x$	$\ln y$	x	$\ln a$	$\ln b$	$y > 0$ $a > 0$ $b > 0$
Степенная функция $y = bx^a$	$\ln y$	$\ln x$	a	$\ln b$	$y > 0$ $x > 0$ $b > 0$
Экспоненциальная функция $y = be^{ax}$	$\ln y$	x	a	$\ln b$	$y > 0$ $b > 0$
Экспоненциальная функция $y = be^{\frac{a}{x}}$	$\ln y$	$\frac{1}{x}$	a	$\ln b$	$y > 0$ $b > 0$
$y = \frac{x}{ax + b}$	$\frac{1}{y}$	$\frac{1}{x}$	a	b	$y \neq 0$ $x \neq 0$
$y = \frac{b}{x + a}$	y	xy	$-\frac{1}{a}$	$\frac{b}{a}$	
$y = \frac{1}{b + ae^{-x}}$	$\frac{1}{y}$	$e^{-x}$	a	b	$y \neq 0$

$$I = I_0 (e^{U/U_0} - 1)$$

$$U_0 \sim 10 \text{ мВ}$$

Вольт-амперная характеристика диода Д 223

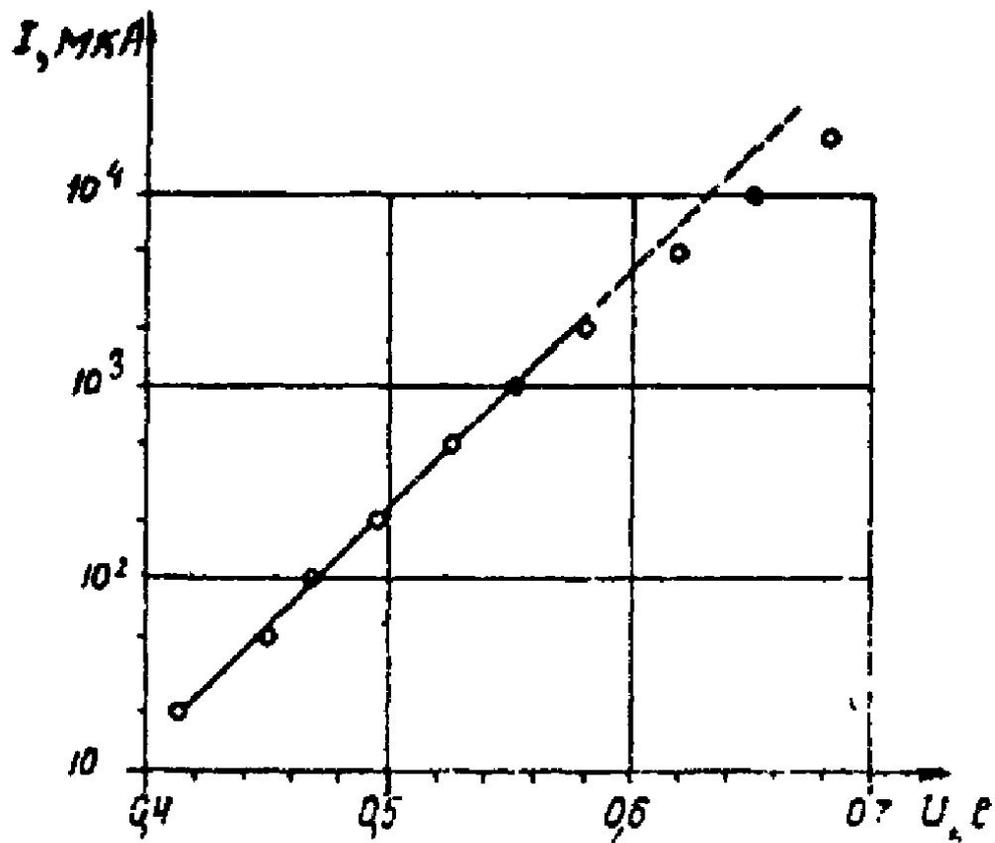
№ измерения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$U$ , мВ	413	450	468	495	527	552	581	620	651	683
$I$ , мкА	20,0	50,0	100	200	500	100.10	200.10	500.10	100.10 <sup>2</sup>	200.10 <sup>2</sup>

$$U \gg U_0$$

$$I \approx I_0 e^{U/U_0}$$

$$\ln I = \ln I_0 + \frac{1}{U_0} \cdot U$$

$$x = U; \quad y = \ln I$$



№ измерения	1	2	3	4	5	6
$x$	413	450	468	495	527	552
$y$	2,996	3,912	4,605	5,298	6,215	6,908

$$\sigma_{\bar{y}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-2)} \sum_{i=1}^n (y_i - \kappa x_i - b)^2};$$

$$\sigma_{\kappa} = \sigma_{\bar{y}} \sqrt{\frac{1}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}};$$

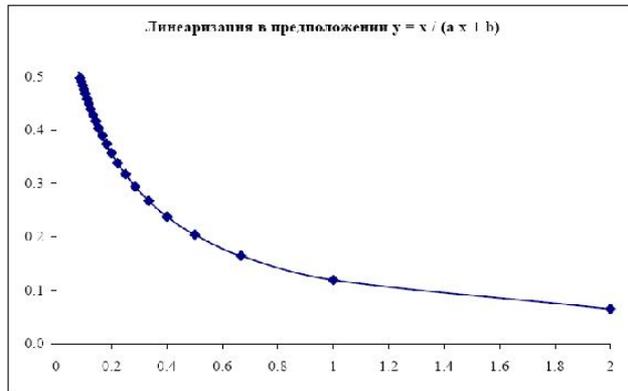
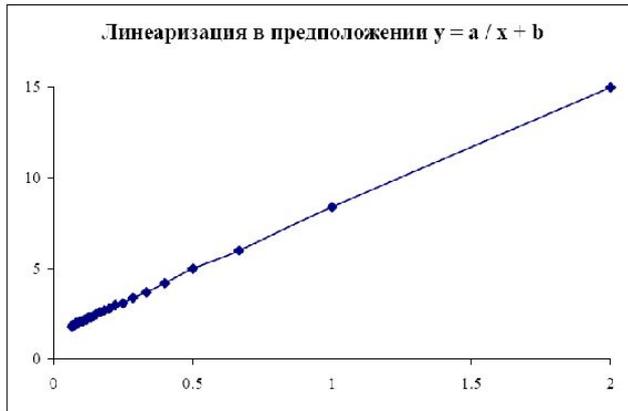
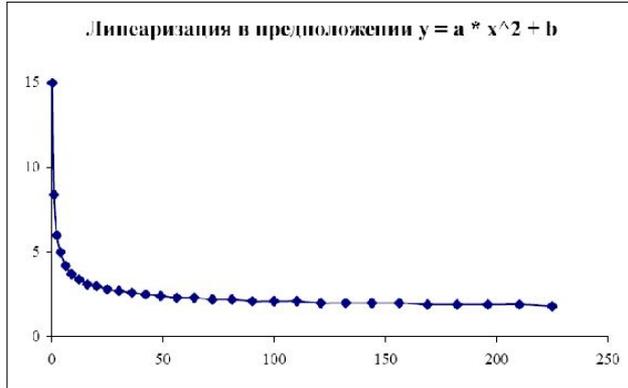
$$\sigma_b = \sigma_{\bar{y}} \sqrt{\frac{\bar{x}^2}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}}.$$

$$U_0 = 35,0 \pm 0,7 \text{ мВ}$$

$$I_0 = (1,4 \pm 0,4) \cdot 10^{-4} \text{ мкА.}$$

Исходные данные

0,5	15,0
1	8,4
1,5	6,0
2	5,0
2,5	4,2
3	3,7
3,5	3,4
4	3,1
4,5	3,0
5	2,8
5,5	2,7
6	2,6
6,5	2,5
7	2,4
7,5	2,3
8	2,3
8,5	2,2
9	2,2
9,5	2,1
10	2,1
10,5	2,1
11	2,0
11,5	2,0
12	2,0
12,5	2,0
13	1,9
13,5	1,9
14	1,9
14,5	1,9
15	1,8



Расчет коэффициента корреляции Пирсона

$$R = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\sum_{i=1}^n ((x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}))}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$$

представление	R
$y = a x^2 + b$	-0,5126
$y = a / x + b$	0,9998
$y = \frac{x}{a x + b}$	-0,8259

Наблюдается сильная корреляция экспериментальных данных в представлении  $y = a / x + b$

Расчет коэффициентов регрессии

$$a = \frac{n \sum_{i=1}^n y_i x_i - \sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2} = 6,8405 \quad b = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n y_i x_i \sum_{i=1}^n x_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2} = 1,4281$$

Расчет среднеквадратичных отклонений

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{1}{n(n-2)} \sum_{i=1}^n (y_i - b - a x_i)^2} = 0,0098$$

$$\sigma_a = \sigma_0 \sqrt{\frac{n}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2}} = 0,0047$$

$$\sigma_b = \sigma_0 \sqrt{\frac{n \sum_{i=1}^n x_i^2}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2}} = 0,0120$$

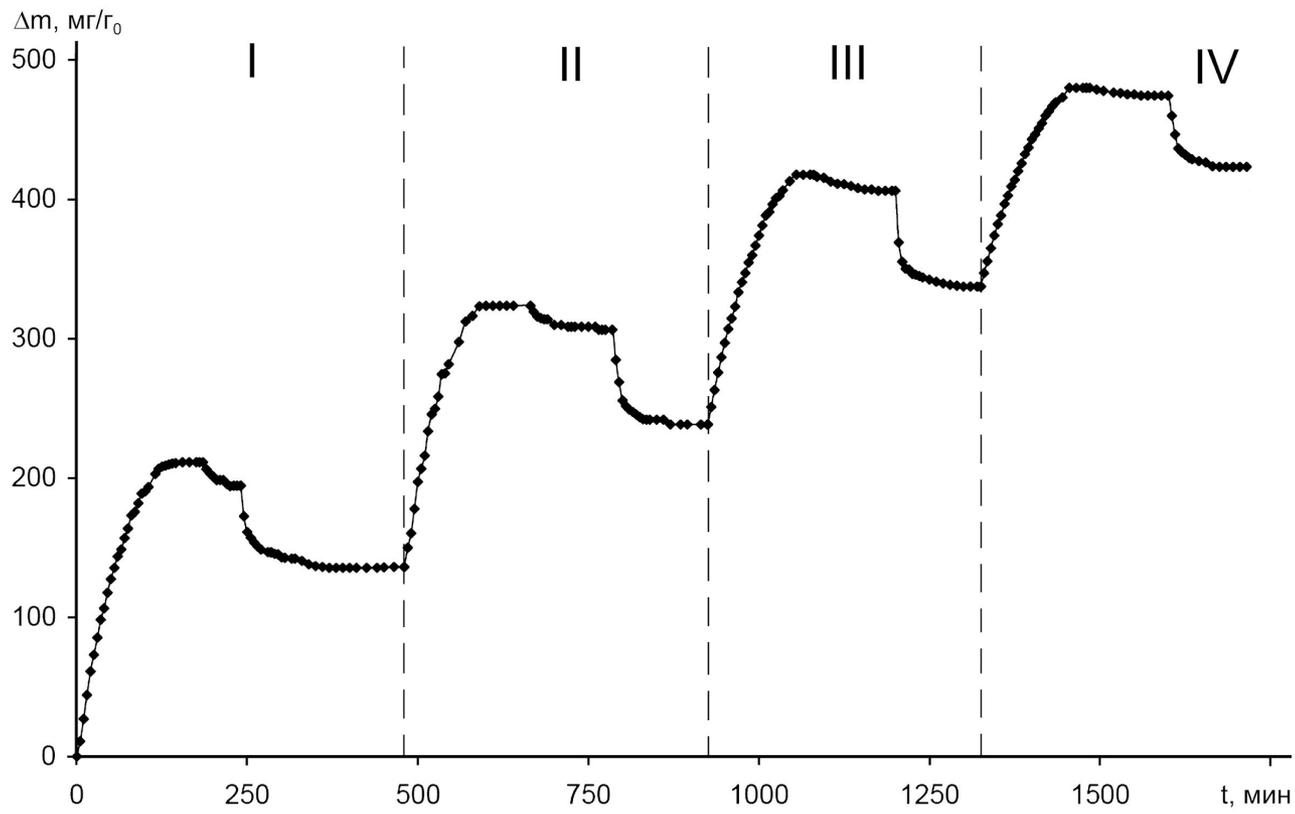
Доверительный интервал коэффициентов регрессии при P=0,95

$$\Delta a = \frac{\sigma_a t_{P, n-1}}{\sqrt{n}} = 0,0018$$

$$\Delta b = \frac{\sigma_b t_{P, n-1}}{\sqrt{n}} = 0,0045$$

Уравнение регрессии

$$y = \frac{(a \pm \Delta a)}{x} + (b \pm \Delta b)$$



### 1. Уравнения ускоряющегося типа

Степенной закон  $\alpha^{1/n} = kt$  **1**

Экспоненциальный закон  $\ln \alpha = kt$  **2**

### 2. Уравнения сигмоидного типа

Аврами—Ерофеева  $\left\{ \begin{array}{l} [-\ln(1-\alpha)]^{1/2} = kt \\ [-\ln(1-\alpha)]^{1/3} = kt \\ [-\ln(1-\alpha)]^{1/4} = kt \end{array} \right.$  **3**

**4**

**5**

Праута—Томпкинса  $\ln[\alpha/(1-\alpha)] = kt$  **6**

### 3. Уравнения замедляющегося типа

#### 3.1. Диффузионные механизмы

Одномерная диффузия  $\alpha^2 = kt$

Двумерная диффузия  $(1-\alpha) \ln(1-\alpha) + \alpha = kt$

Трехмерная диффузия  $[1 - (1-\alpha)^{1/3}]^2 = kt$

Гинстлинг—Браунштейн  $[1 - (2\alpha/3)] - (1-\alpha)^{2/3} = kt$

#### 3.2. Геометрические модели

Сжимающаяся площадь  $1 - (1-\alpha)^{1/2} = kt$  **7**

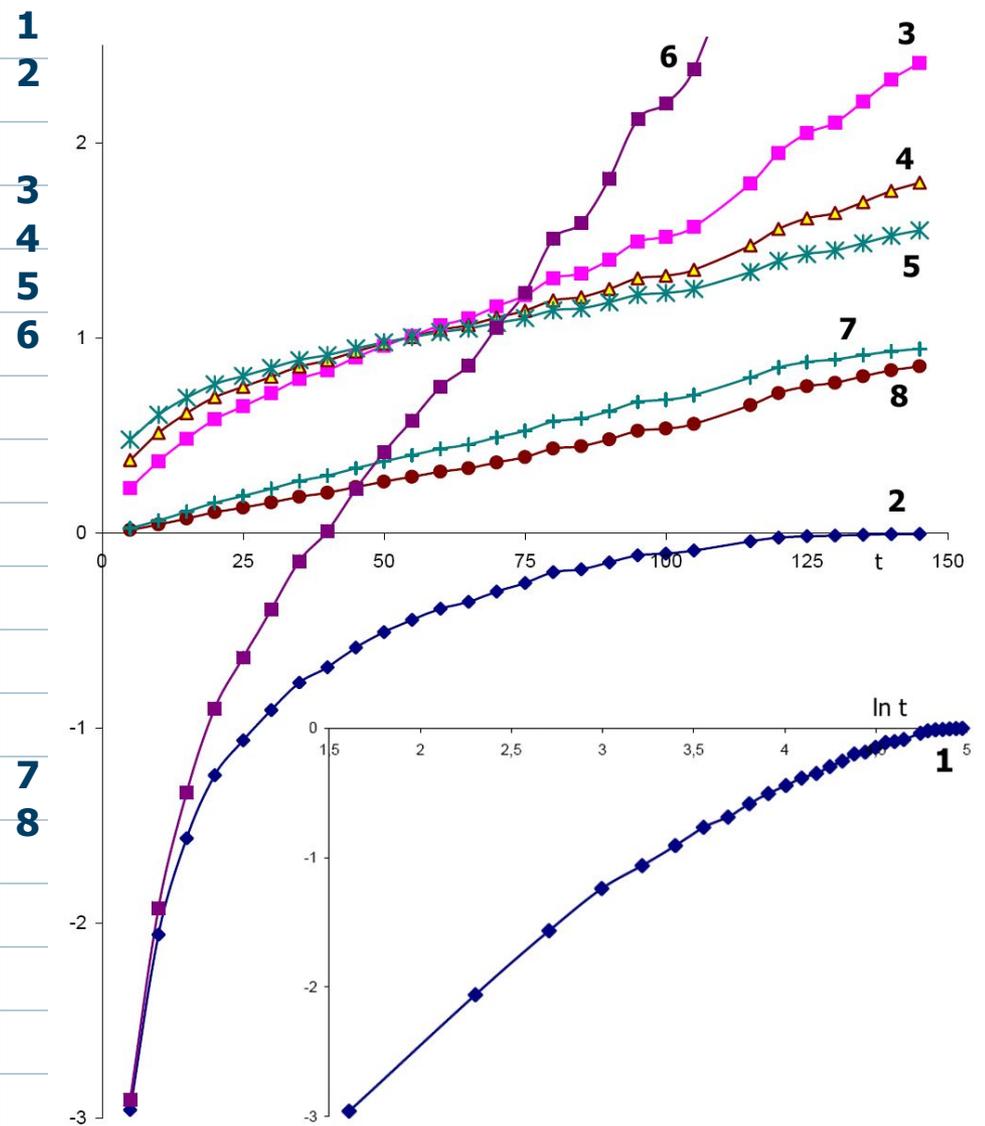
Сжимающийся объем  $1 - (1-\alpha)^{1/3} = kt$  **8**

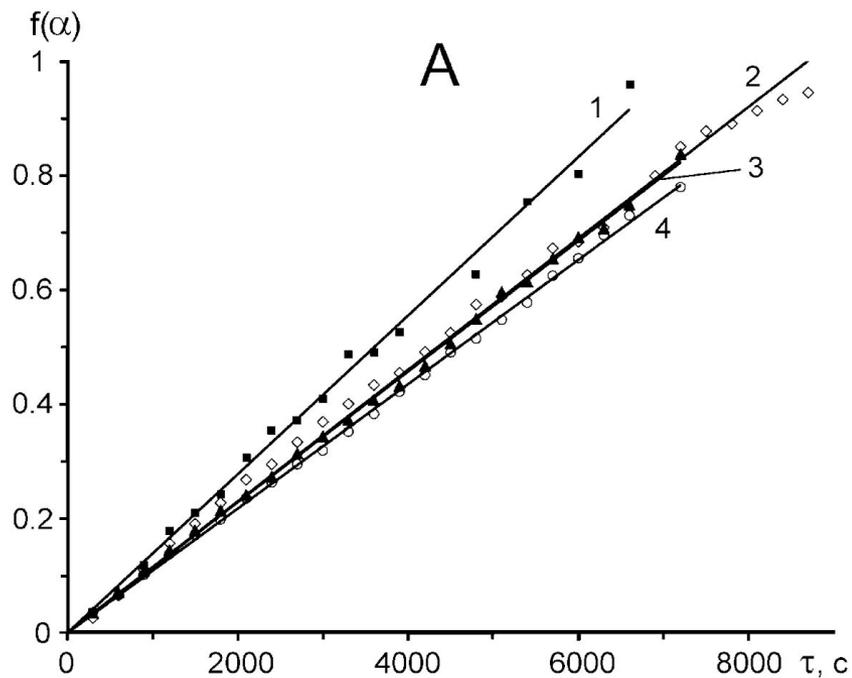
#### 3.3. Порядок реакции по отношению к $\alpha$

Первый  $-\ln(1-\alpha) = kt$

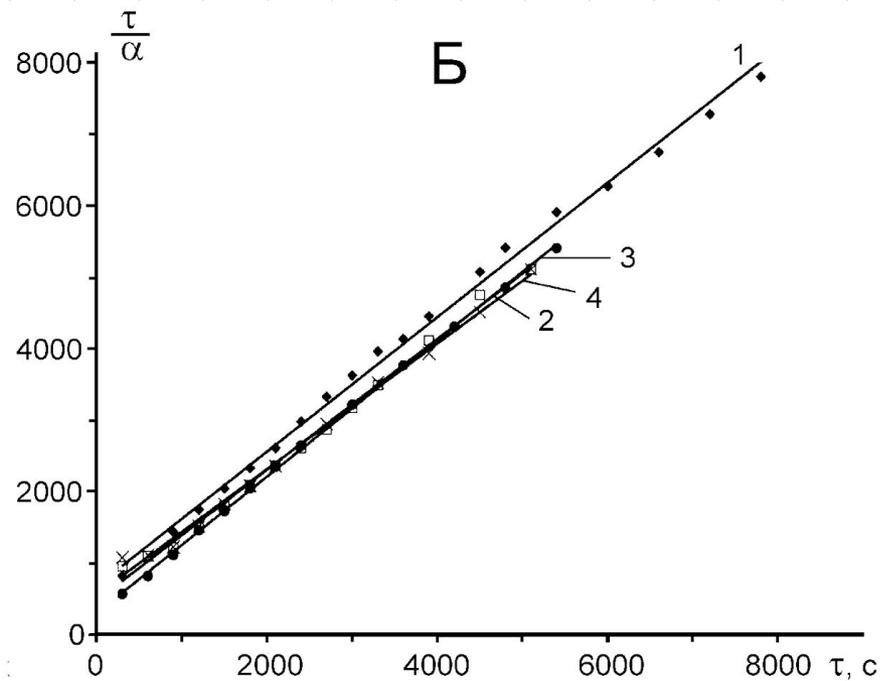
Второй  $(1-\alpha)^{-1} = kt$

Третий  $(1-\alpha)^{-2} = kt$





$$1 - (1 - \alpha)^{1/2} = k\tau$$



$$\frac{\tau}{\alpha} = \frac{1}{kq_{\max}} + \tau$$

