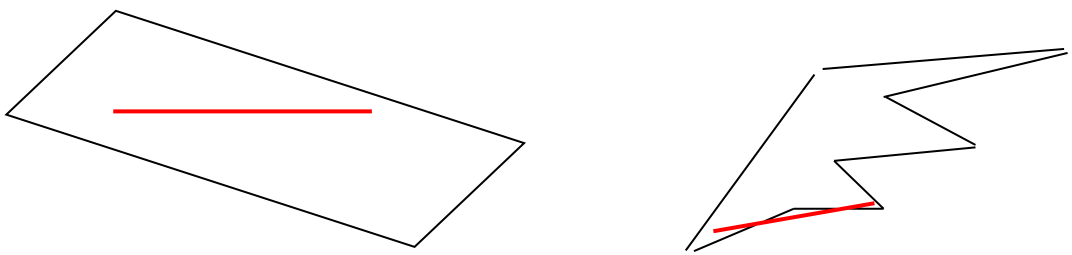
Геометрическая интерпретация ЗЛП

Основные определения

- Точка A называется ***линейной выпуклой комбинацией*** точек

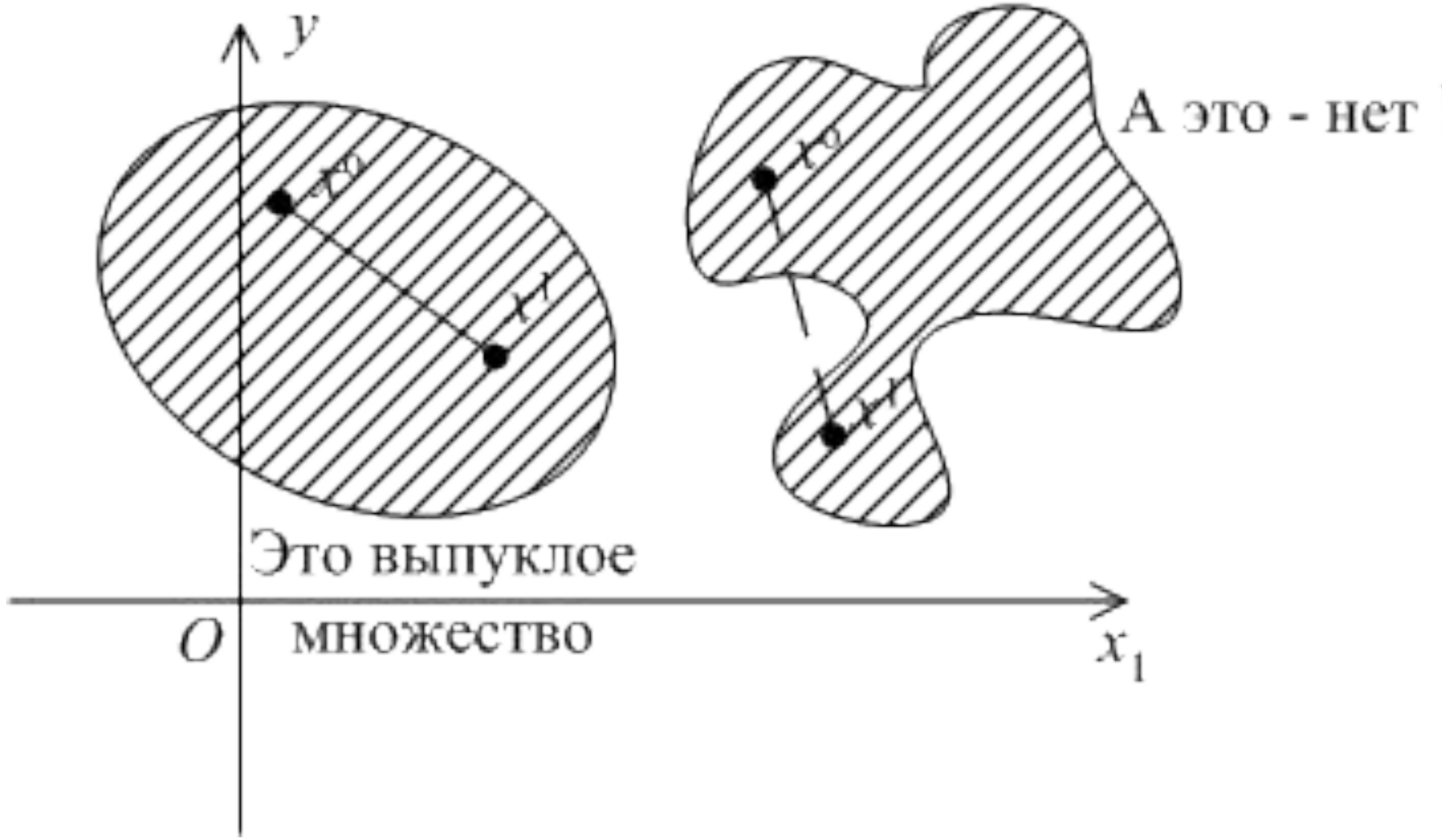
$$A_1, A_2, \text{ если } \quad A = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \quad \lambda_1, \lambda_2 \geq 0.$$

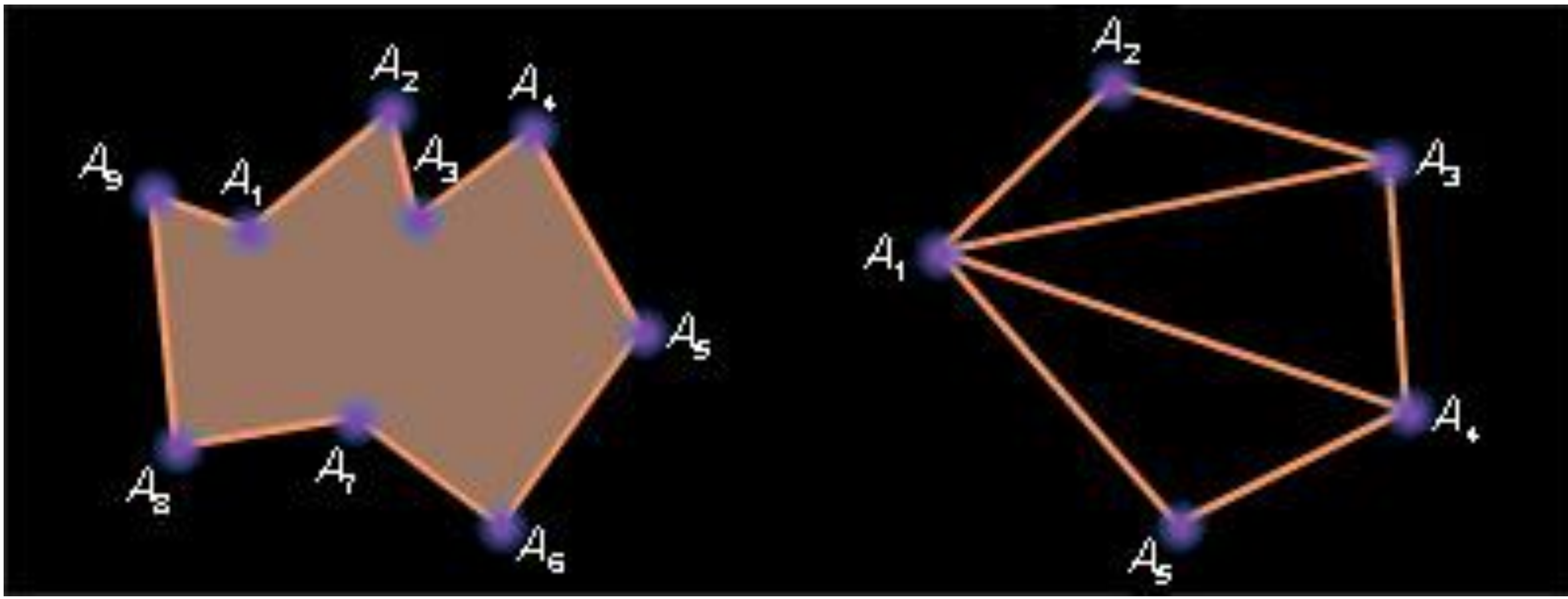
- Множество называется ***выпуклым***, если с любыми своими двумя точками оно содержит их произвольную линейную выпуклую комбинацию.



выпуклое множество не выпуклое множество

- ***Граничной точкой*** множества называется точка, для которой верно: любой шар со сколь угодно малым радиусом содержит точки как принадлежащие, так и не принадлежащие множеству.


y
x^0
x^1
Это выпуклое
множество
O
x_1
А это - нет !
x^0
x^1



A_9
A_1
A_2
A_3
A_4
A_5
A_6
A_7
A_8
A_2
A_3
A_1
A_4
A_5

- ***Множество*** называется ***замкнутым***, если оно содержит все свои граничные точки.
- ***Множество*** называется ***ограниченным***, если существует шар, радиусом *R*, содержащий в себе всё множество.
- ***Точка*** называется ***угловой***, если она не может быть представлена в виде выпуклой линейной комбинации двух различных точек этого множества.
- Ограниченное выпуклое замкнутое множество на плоскости с конечным числом вершин называется ***выпуклым многоугольником.***

Теорема Выпуклый замкнутый ограниченный многогранник является выпуклой линейной комбинацией своих угловых точек.

Лемма Пересечение любого количества выпуклых множеств является выпуклым множеством.

Доказательство

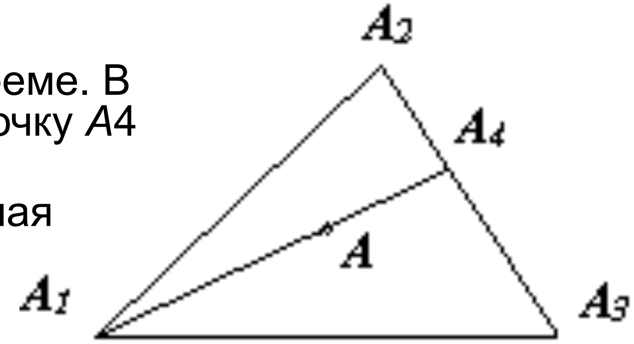


рис.2.3

Докажем, что любая точка треугольника удовлетворяет теореме. В треугольнике $A1A2A3$ (рис.2.3) возьмем произвольную точку $A4$ и через нее проведем отрезок $A1A4$.

Так как точка A принадлежит отрезку $A1A4$, то она — выпуклая линейная комбинация его концов, т. е.

$A = t1A1 + t4A4$, $t1 \geq 0$, $t4 \geq 0$,

$$t1 + t4 = 1. \qquad (2.46)$$

Точка $A4$ принадлежит отрезку $A2A3$, следовательно, является выпуклой линейной комбинацией его концов, т. е.

$$A4 = t2A2 + t3A3,\ t2 \geq 0,\ t3 \geq 0,\ t2 + t3 = 1. \qquad (2.47)$$

Подставляя (2.47) в (2.46) получаем

$A = t1A1 + t4(t2A2 + t3A3) = t1A1 + t2t4A2 + t3t4A3.$

Полагая $t1 = \lambda 1$, $t2t4 = \lambda 2$, $t3t4 = \lambda 3$, окончательно имеем

$A = \lambda 1A1 + \lambda 2A2 + \lambda 3A3,$

$$\lambda 1 \geq 0,\ \lambda 2 \geq 0,\ \lambda 3 \geq 0,\ \lambda 1 + \lambda 2 + \lambda 3 = 1, \qquad (2.48)$$

т. е. точка A — выпуклая линейная комбинация вершин $A1$, $A2$, $A3$.

В выпуклом многоугольнике, имеющем n вершин ($n > 3$), добавляя к правой части соотношения (2.48) остальные $n - 3$ вершины, умноженные на нуль, окончательно получим

$A = \lambda 1A1 + \lambda 2A2 + \lambda 3A3 + 0 \cdot A4 + ... + 0 \cdot An,$

$\lambda I \geq 0$ ($i = 1, 2, ..., n$), ,

т. е. точка A — выпуклая линейная комбинация угловых точек многоугольника.

Геометрическая интерпретация задач линейного программирования

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 \to \min(\max)$$

$$\nabla z = (c_1, c_2)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

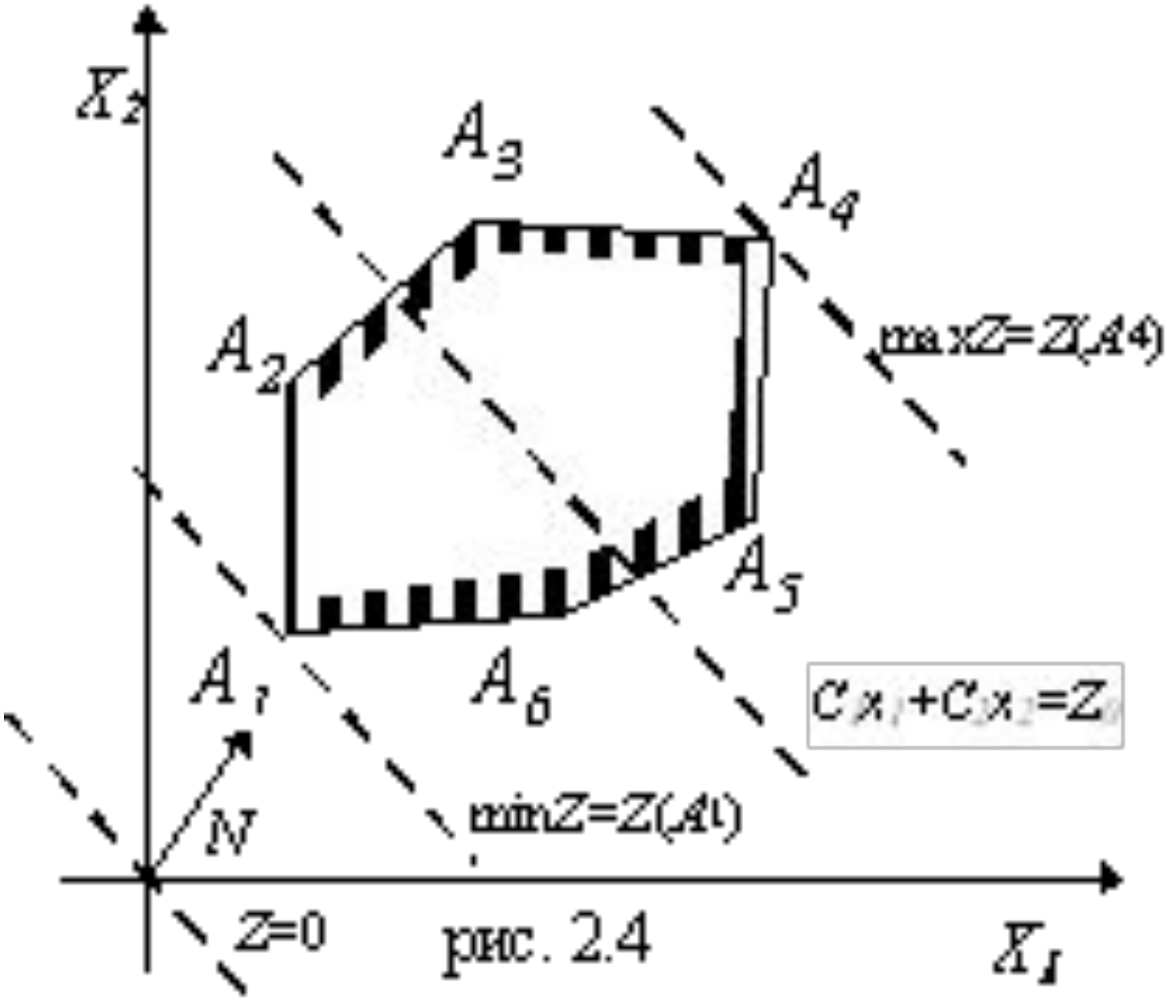
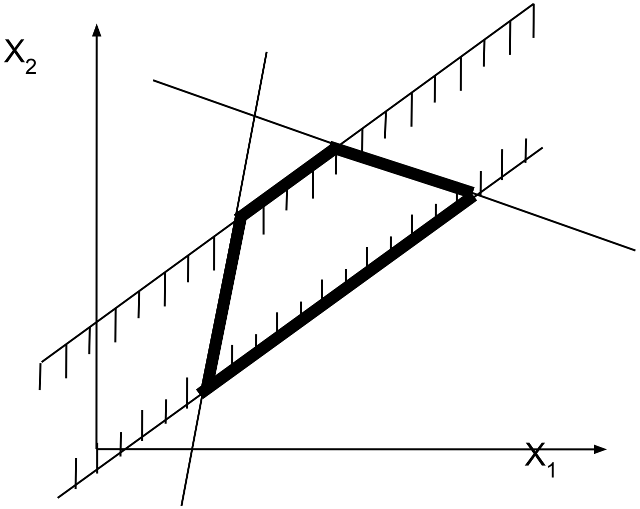


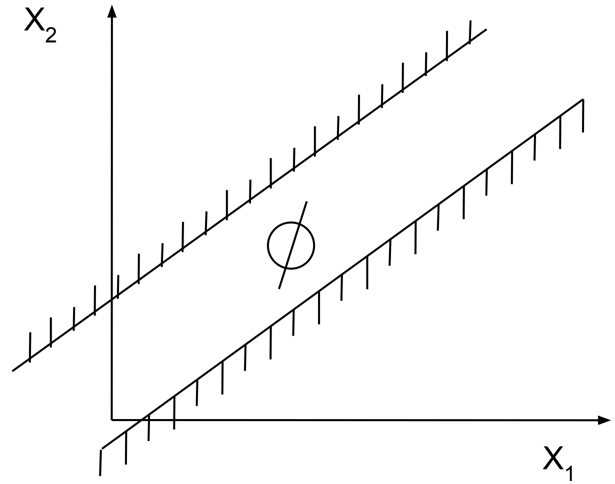
рис. 2.4

Различные виды ОДЗ:

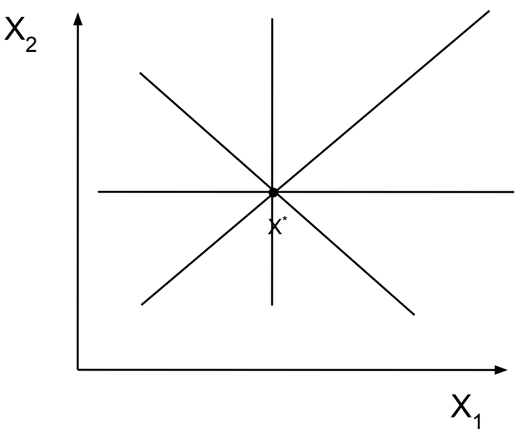
1)



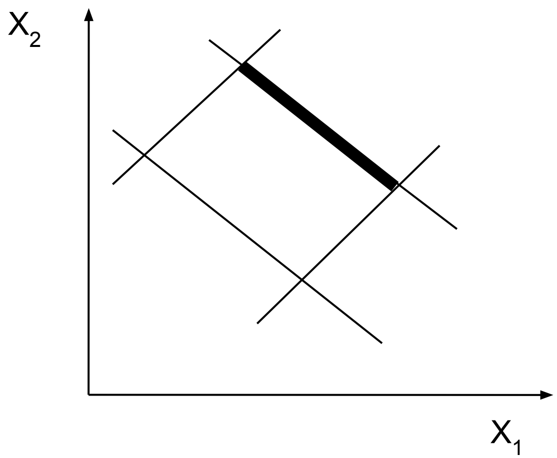
2)



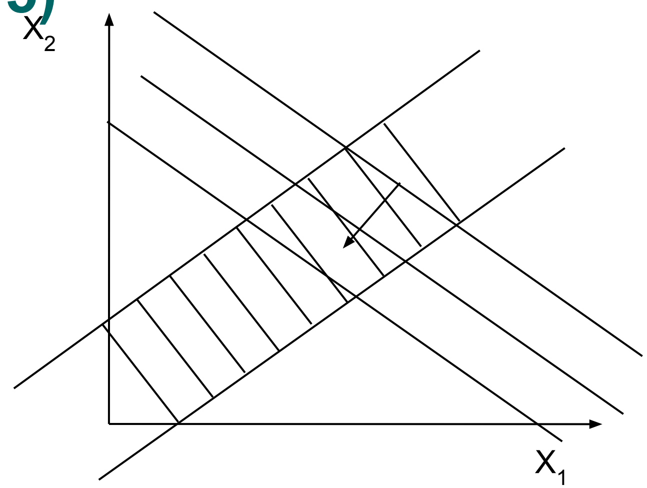
3)



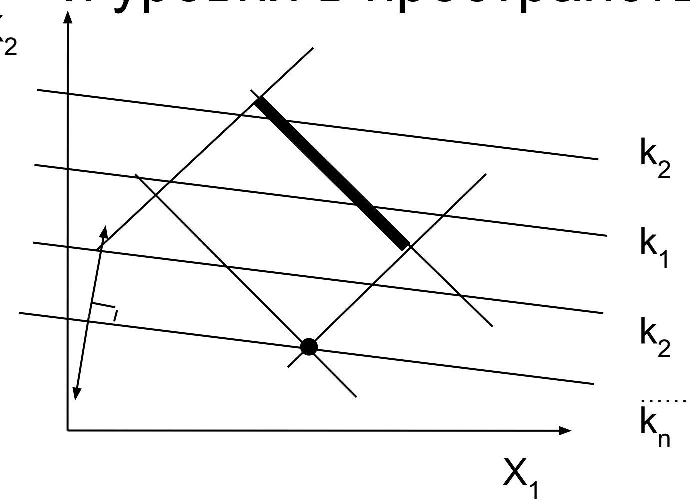
4)



5)



$c_1x_1 + c_2x_2 = const$ - семейство прямых – ***линии уровня*** целевой функции. Линии уровня в пространстве параллельны.



∇ (***градиент***) *f = grad(f)* – вектор из частных производных =

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots \right).$$

Градиент всегда показывает направление возрастания функции. Вектор градиент функции в точке всегда перпендикулярен касательной.

Свойства решений ЗЛП

Теорема 1 ***Т е о р е м а 1.*** *Множество всех планов задачи линейного программирования выпукло.*

(или ОДЗ ЗЛП выпукла)

Доказательство.

Необходимо доказать, что если $X1$ и $X2$ — планы задачи линейного программирования, то их выпуклая линейная комбинация

$X = \lambda 1X1 + \lambda 2X2$, $\lambda 1 \geq 0$, $\lambda 2 \geq 0$, $\lambda 1 + \lambda 2 = 1$ также план задачи.

Так как $X1$ и $X2$ — планы задачи, то выполняются соотношения

$AX1 = A0$, $X1 \geq 0$, $AX2 = A0$, $X2 \geq 0$.

Перемножая

$AX = A(\lambda 1X1 + \lambda 2X2) = \lambda 1AX1 + \lambda 2AX2 = \lambda 1A0 + \lambda 2A0 =$

$= (\lambda 1 + \lambda 2)A0 = A0$,

получаем, что X удовлетворяет системе (2.43).

(2.52)

$xi \geq 0$ ($i = 1, 2, ..., n$) (2.53)

Но так как $X1 \geq 0$; $X2 \geq 0$, $\lambda 1 \geq 0$, $\lambda 2 \geq 0$, то и $X \geq 0$, т. е. удовлетворяет и условию (2.53). Таким образом X — план задачи линейного программирования.

Теорема 2 ***Целевая*** функция ЗЛП достигает своего минимального (максимального) значения в угловой точке многогранника решений. Если целевая функция достигает своего экстремального значения более чем в одной угловой точке многогранника решений, то она достигает того же значения в любой линейной выпуклой комбинации этих угловых точек.

Доказательство.
Предположим, что многогранник решений ограниченный, имеющий конечное число угловых точек. Обозначим его через *K*. В двумерном пространстве *K* имеет вид многоугольника, изображенного на рис. 2.5. Обозначим угловые точки *K* через *X*1, *X*2, ..., *Xp*, а оптимальный план — через *X*0. Тогда $Z(X0) \le Z(X)$ для всех *X* из *K*. Если *X*0 — угловая точка, то первая часть теоремы доказана. Предположим, что *X*0 не является угловой точкой; тогда *X*0 на основании теоремы 1 можно представить как выпуклую линейную комбинацию угловых точек *K*, т. е.

$X0 = \lambda 1X1 + \lambda 2X2 + ... + \lambda pXp$,

$\lambda I \ge 0$ $(i = 1, 2, ..., p)$, .

Так как $Z(X)$ — линейная функция, получаем

$Z(X) = Z(\lambda 1X1 + \lambda 2X2 + ... + \lambda pXp) =$

$= \lambda 1Z(X1) + \lambda 2Z(X2) + ...$

$... + \lambda pZ(Xp).$ (2.54)

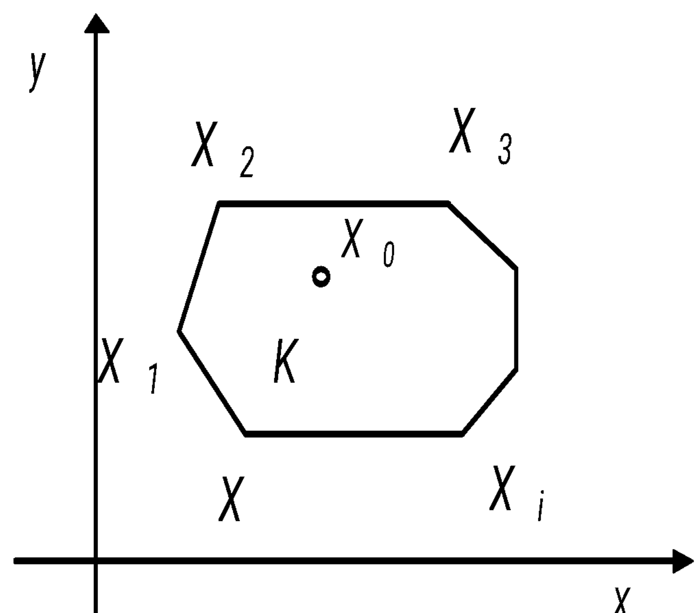


рис.2.5

В этом разложении среди значений $Z(X_i)$ ($i = 1, 2, ..., p$) выберем наименьшее [пусть оно соответствует угловой точке X_k ($1 \le k \le p$)] и обозначим его через m, т. е. $Z(X_k) = m$. Заменим в (2.54) каждое значение $Z(X_i)$ этим наименьшим значением. Тогда, так как $\lambda_i \ge 0$, , то

$Z(X_0) \ge \lambda_1 m + \lambda_2 m + ... + \lambda_p m = m$.

По предположению, X_0 — оптимальный план, поэтому, с одной стороны, $Z(X_0) \le m$, но с другой стороны, доказано, что $Z(X_0) \ge m$, значит, $Z(X_0) = m = Z(X_k)$, где X_k — угловая точка. Итак, существует угловая точка X_k, в которой линейная функция принимает минимальное значение.

Для доказательства второй части теоремы допустим, что $Z(X)$ принимает минимальное значение более чем в одной угловой точке, например в точках $X_1, X_2, ..., X_q$, $1 < q \le p$; тогда $Z(X_1) = Z(X_2) = ... = Z(X_q) = m$. Если X — выпуклая линейная комбинация этих угловых точек:

$X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + ... + \lambda_q X_q$, $\lambda_I \ge 0$ ($i = 1, 2, ..., q$), ,

то

$Z(X) = Z(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + ... + \lambda_q X_q) = \lambda_1 Z(X_1) + \lambda_2 Z(X_2) + ...$

$... + \lambda_q Z(X_q) = \lambda_1 m + \lambda_2 m + ... + \lambda_q m = m$.

т. е. линейная функция Z принимает минимальное значение в произвольной точке X, являющейся выпуклой линейной комбинацией угловых точек $X_1, X_2, ..., X_q$.

Графический метод решения задачи линейного программирования

Пусть задача линейного программирования задана в двумерном пространстве, т. е. ограничения содержат две переменные.

Найти минимальное значение функции

$Z = C1x1 + C2x2$

при условиях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m, \end{cases}$$

$x1 \ge 0,\ x2 \ge 0.$

Алгоритм графического решения ЗЛП

1. Строят прямые, уравнения которых получаются в результате замены в ограничениях знаков неравенств на знаки точных равенств.
2. Находят полуплоскости, определяемые каждым из ограничений задачи.
3. Находят многоугольник решений.
4. Строят вектор ***N*** (*C*1; *C*2),
5. Строят прямую *C*1*x*1 + *C*2*x*2 = *const.*
6. Передвигают эту прямую в направлении вектора ***N***, в результате чего либо находят точку (точки), в которой целевая функция принимает минимальное значение, либо устанавливают неограниченность снизу функции на множестве планов.
7. Определяют координаты точки минимума функции на множестве планов.

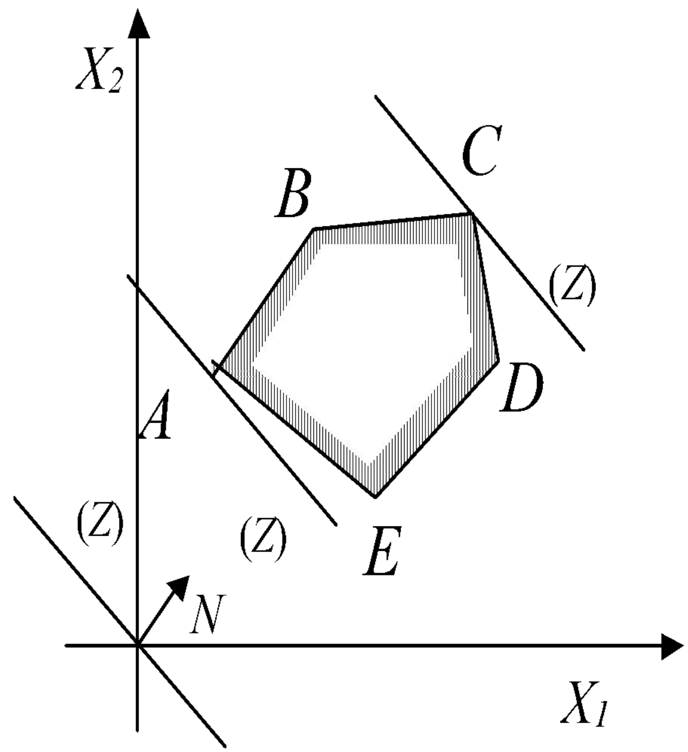
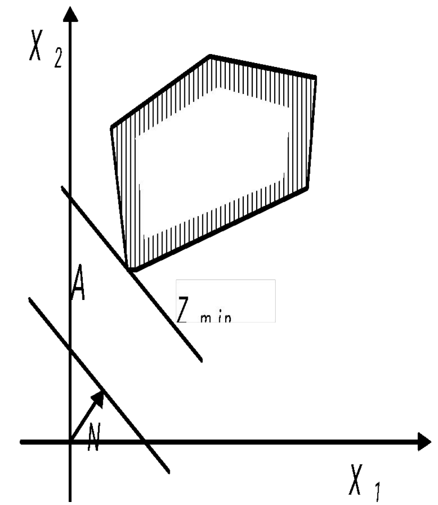
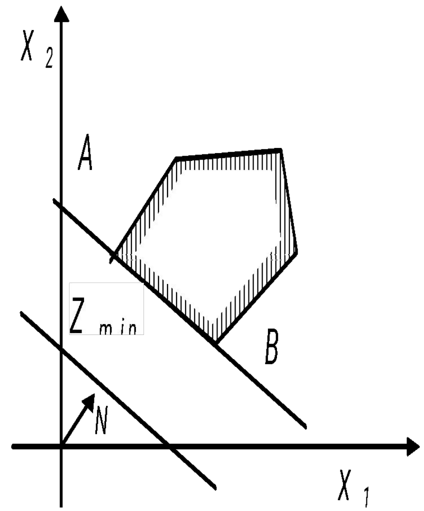


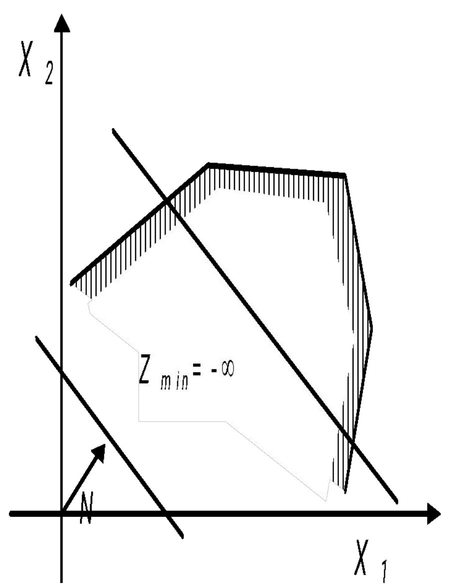
рис.2.6



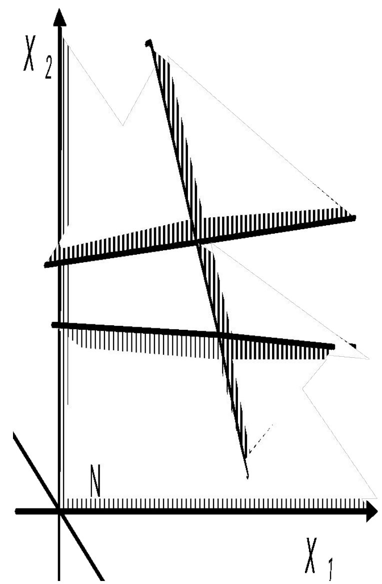
X_2
A
Z_{min}
N
X_1



X_2
A
Z_{min}
B
N
X_1



X_2
$Z_{min} = -\infty$
N
X_1



X_2
N
X_1

Симплекс-метод

Идея симплекс-метода

Решение основной задачи линейного программирования геометрическим методом является наглядным в случае двух и даже трех переменных. Для случая же большего числа переменных этот метод становится невозможным.

В связи с этими трудностями возникла задача *рационального перебора* крайних точек решения основной задачи линейного программирования.

Общая идея наиболее широко применяемого *симплексного метода состоит в последовательном улучшении плана* для решения ЗЛП.

Если известны какая-нибудь крайняя точка и значение целевой функции, то все крайние точки, в которых целевая функция принимает худшее значение, заведомо не нужны. Отсюда естественно стремление найти способ перехода от данной крайней точки к смежной по ребру лучшей, от нее к еще лучшей (не худшей). Для этого нужно иметь признак того, что лучших крайних точек, чем данная крайняя точка, вообще нет.

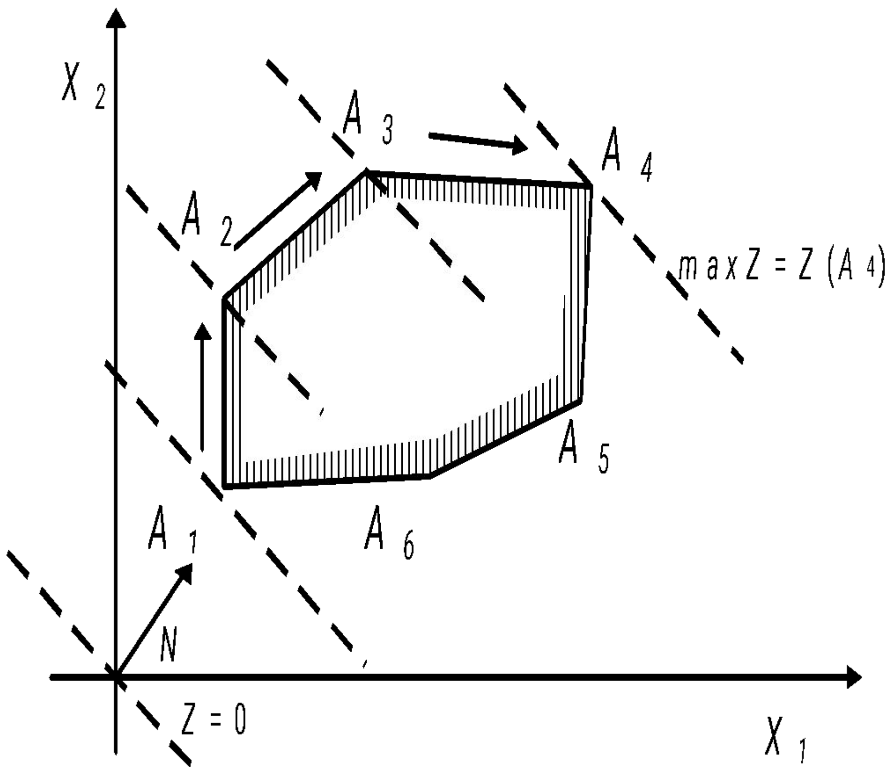


рис.2.12

На рис. 2.12 дана геометрическая интерпретация идеи симплексного метода в случае двух переменных.

Теоретические обоснования симплекс-метода. Любую ЗЛП можно представить в эквивалентном предпочтительном виде:

$$\max(\min)\ Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j , \qquad (2.58)$$

$$x_i + \sum_{j=m+1}^{n} a_{ij} x_j = b_i , \quad b_i \ge 0 \quad (i = \overline{1,m}), \qquad (2.59)$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,n}). \qquad (2.60)$$

Выразим базисные переменные x_1, x_2, ..., x_m из равенств (2.59) через свободные x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n и подставим их в целевую функцию. После группировки подобных членов получим

$$\begin{aligned} Z = (c_1b_1 + c_2b_2 + \ldots + c_mb_m) - ((c_1a_{1,m+1} + c_2a_{2,m+1} + \ldots \\ \ldots + c_ma_{m,m+1}) - c_{m+1})x_{m+1} + ((c_1a_{1,m+2} + c_2a_{2,m+2} + \ldots \\ \ldots + c_ma_{m,m+2}) - c_{m+2})x_{m+2} + \ldots + ((c_1a_{1n} + c_2a_{2n} + \ldots \\ \ldots + c_ma_{mn}) - c_n)x_n \end{aligned} \qquad (2.61)$$

Введем обозначения:

$$\Delta_0 = c_1b_1 + c_2b_2 + \ldots + c_mb_m = \boldsymbol{c}_б\boldsymbol{A}_0, \qquad (2.62)$$

$$\Delta_j = (c_1a_{1j} + c_2a_{2j} + \ldots + c_ma_{mj}) - c_j = \boldsymbol{c}_б\boldsymbol{A}_j - c_j,$$

$$(j = \overline{1,n}). \qquad (2.63)$$

где $\boldsymbol{c}_б = (c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_m)$ — вектор коэффициентов целевой функции при базисных переменных; $A_0 = (b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_m)^{\mathrm{T}}$ — вектор-столбец свободных членов; $A_j = (a_{1j},\ a_{2j},\ \ldots,\ a_{mj})^{\mathrm{T}}$ — вектор-столбец коэффициентов при переменных x_j.

С учетом равенств (2.61)—(2.63) задача (2.58)—(2.60) примет вид:

$$\max\ (\min)\ Z = \Delta_0 - \sum_{j=m+1}^{n} \Delta_j x_j; \qquad (2.64)$$

$$x_i + \sum_{j=m+1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = \overline{1, m}), \qquad (2.65)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}), \qquad (2.66)$$

где $\Delta_0 = \boldsymbol{c}_б A_0$; $\Delta_j = \boldsymbol{c}_б A_j - c_j \quad (j = \overline{1, n})$.

Задачу (2.64)—(2.66) записывают в таблицу, которая называется *симплексной* (табл.1). Последнюю строку называют *индексной строкой* (*строкой целевой функции*), число $\Delta_0 = \boldsymbol{c}_б A_0$ — значение целевой функции для начального опорного плана $\boldsymbol{x}_0$, т. е. $\Delta_0 = Z(\boldsymbol{x}_0)$. Числа $\Delta_j = \boldsymbol{c}_б A_j c_j\ (j = \overline{1, n})$ называются *оценками свободных переменных*.

Теорема 1. *Пусть исходная задача решается на максимум. Если для некоторого опорного плана все оценки Δ_j $(j = \overline{1,n})$ неотрицательны, то такой план оптимален.*

Доказательство. Так как $Z = \Delta_0 - \sum_{j=m+1}^{n} \Delta_j x_j$ и по условию $\Delta_j \geq 0$ $(j = \overline{1,n})$, то Z достигает максимального значения при $\sum_{j=m+1}^{n} \Delta_j x_j = 0$. Это возможно лишь при $x_{m+1} = 0$, $x_{m+2} = 0$, ..., $x_n = 0$, т. е. опорный план $(b_1, b_2, ..., b_m, 0_{m+1}, 0_{m+2}, \ldots, 0_{m+n})$ оптимален.

Теорема 2. *Если исходная задача решается на минимум и для некоторого опорного плана все оценки Δ_j $(j = \overline{1,n})$ неположительны, то такой план оптимален.*

Доказательство аналогично предыдущему случаю.

Переход к нехудшему опорному плану.

Теорема 3. *Если $\Delta_k < 0$ для некоторого $j = k$ и среди чисел a_{ik} $(i = \overline{1,m})$ нет положительных, то целевая функция ЗЛП не ограничена на множестве ее планов.*

Теорема 4. *Если опорный план X ЗЛП не вырожден и $\Delta_k < 0$, но среди чисел a_{ik} есть положительные (не все $a_{ik} < 0$), то существует опорный план X' такой, что $Z(X') > Z(X)$.*

Теорема 1 Пусть исходная задача решается на минимум, тогда если для некоторого опорного решения все z-оценки

$$\Delta_j \quad (j = \overline{1, n})$$

неположительные, то такое опорное решение является оптимальным.

Теорема 2 Если исходная задача решается на максимум, то в случае, когда все $\Delta_j \quad (j = \overline{1, n})$ – неотрицательные, получаем оптимальное решение исходной задачи.

Теорема 3 Если опорный план ЗЛП не вырожден и $\exists \Delta_k > 0$ такое, что в k-ом столбце системы ограничений есть хотя бы одно положительное число, т.е. не все $a_{ik} < 0$, то существует такое опорное решение x', что $z(x') < z(x)$, где x – исходное опорное.

Теорема 4 Если опорное решение ЗЛП не вырождено и $\exists \Delta_k > 0$ и в k-ом столбце системы ограничений нет ни одного положительного числа, т.е. все $a_{ik} < 0$, то целевая функция не ограничена на ОДР.

Структура симплекс таблицы

			C_1	C_2	...	C_m	C_{m+1}	...	C_n
$X_Б$	$C_Б$	A_0	A_1	A_2	...	A_m	A_{m+1}	...	A_n
x_1	C_1	b_1	1	0	...	0	$a_{1,\ m+1}$	...	$a_{1,\,n}$
x_2	C_2	b_2	0	1	...	0	$a_{2,\ m+1}$	...	$a_{2,\,n}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
x_m	C_m	b_m	0	0	...	1	$a_{m,\ m+1}$	...	$a_{m,\,n}$
Δ_k		Δ_0	0	0	...	0	Δ_{m+1}	...	Δ_n

Методы контроля:

1. Z-оценки при базисных переменных равны нулю $\Delta_i = 0 \quad i = (\overline{1,m});$

2. Значения правой части всегда неотрицательны $b_j \geq 0 \quad j = (\overline{1,n});$

3. Значение целевой функции на каждом шаге не ухудшается.

Зацикливание

Зацикливание может возникать при наличии вырожденного опорного решения. Выражается в том, что значение целевой функции на следующем шаге не меняется.