



Нелинейное программирование

*Геометрический способ решения
ЗНЛП*

*Метод неопределенных множителей
Лагранжа*

$$f(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \max(\min)$$

$$g_i(x_1, \dots, x_n) \leq b_i \quad (i = \overline{1, m})$$

$$f(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \max(\min)$$

$$g_i(x_1, \dots, x_n) = b_i \quad (i = \overline{1, m})$$

- задача классической оптимизации

Отличия от ЗЛП:

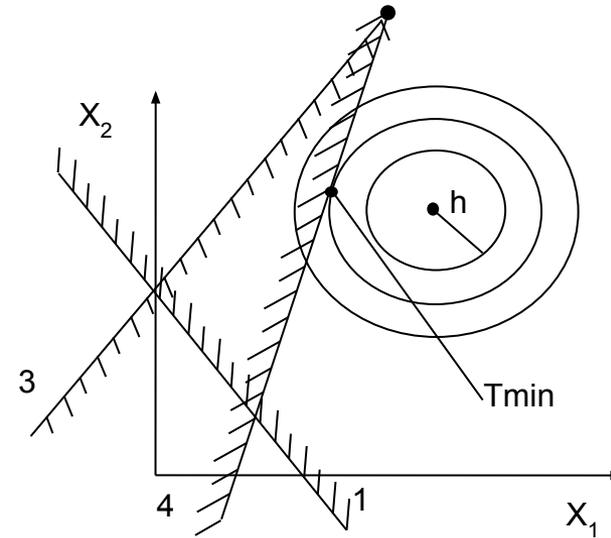
1. ОДЗ не обязательно выпуклая.
2. Экстремум не обязан находиться на границе ОДЗ.

Пример:

$$F(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2 \rightarrow \min, \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 7 \\ 10x_1 - x_2 \leq 8 \\ -18x_1 + 4x_2 \leq 12 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



$$(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2 = h$$

$$2(x_1 - 3) + 2(x_2 - 4)x_2' = 0$$

$$x_2' = \frac{-2(x_1 - 3)}{2(x_2 - 4)} = \frac{x_1 - 3}{4 - x_2}$$

$$\begin{cases} x_1 - 3 = 10(4 - x_2) \\ 10x_1 - x_2 = 8 \end{cases}$$

$$x_1^* = \frac{123}{101}; x_2^* = \frac{422}{101}$$

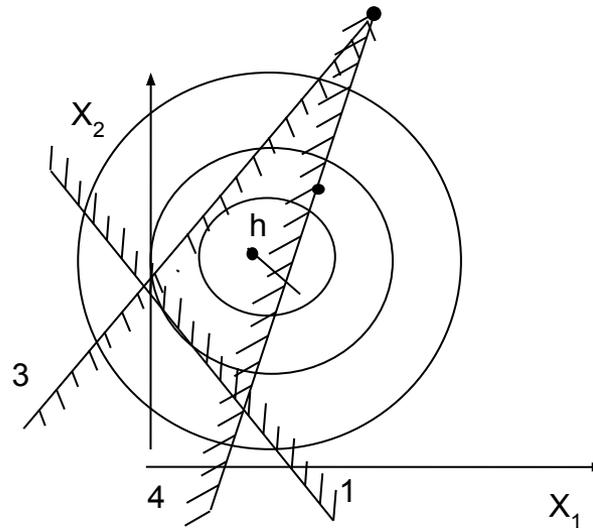
$$f(\min) = \frac{324}{101}$$

$$x_1^{**} = 2, x_2^{**} = 12,$$

$$f(\max) = 65$$

Пример:

$$F(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 4)^2 \rightarrow \min, \max$$



Метод неопределенных множителей Лагранжа

Данным методом решаются задачи нелинейного программирования с условным экстремумом:

$$f(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \max$$

$$g_i(x_1, \dots, x_n) = b_i \quad (i = \overline{1, m})$$

$$F = f(x_1, \dots, x_n) - \sum_{i=1}^m \lambda_i [b_i - g_i(x_1, \dots, x_n)]$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_j} = \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial g_i(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_j} = 0 \quad (j = \overline{1, n}) \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_i} = b_i - g_i(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad (i = \overline{1, m}) \end{cases}$$

Задача

По плану производства продукции предприятию необходимо изготовить 180 изделий. Они могут быть изготовлены двумя способами.

При производстве x_1 штук первым способом затраты на них $4x_1 + x_1^2$ рублей.

При производстве x_2 штук вторым способом затраты на них $8x_2 + x_2^2$ рублей.

Определить: сколько изделий каждым способом нужно изготовить, чтобы затраты на производство были минимальными.

$$\begin{array}{l} F = 4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2 \rightarrow \min \\ x_1 + x_2 = 180 \\ F = 4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2 - \lambda_1(180 - x_1 - x_2) \end{array} \longrightarrow \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_1} = 4x_1 + 2x_1 + \lambda_1 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} = 8 + 2x_2 + \lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = -180 + x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \longrightarrow x_1^* = 91, \quad x_2^* = 89$$

$F = 17278$ – затраты.