Задачи выпуклого программирования

Постановка задачи выпуклого программирования

$$f\left[x_1, x_2, \ldots, x_n\right] \to \max (\min) \qquad (1)$$

$$g_i\left[x_1, x_2, \ldots, x_n\right] \le b_i \, (i = 1, \ldots, m) \qquad (2)$$

$$x_j \ge 0 \, (j = 1, \ldots, n),$$

$$f\left[\lambda X_2 + (1-\lambda) X_1\right] \le \lambda f(X_2) + (1-\lambda) f(X_1).$$

$$0 \le \lambda \le 1$$

$$f\left[\lambda X_2 + (1-\lambda) X_1\right] \ge \lambda f(X_2) + (1-\lambda) f(X_1).$$

$$0 \le \lambda \le 1$$

Область допустимых значений (2) обладает свойством регулярности, если найдется такой вектор x_k, что все функции

$$q_i(x_k) < b_i \quad (i = \overline{1,m}).$$

ЗНЛП называется ***задачей выпуклого программирования***, если функция (1) либо выпуклая, либо вогнута, а все функции g_i выпуклы.

Теорема Любой локальный экстремум задачи выпуклого программирования является глобальным .

Функцией Лагранжа L называется следующая функция:

$$L(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m) = f(x_1,\ldots,x_n) + \sum_{i=1}^{m} y_i[b_i - g_i(x_1,\ldots,x_n)].$$

Седловой точкой функции Лагранжа L называется вектор $\left(X^{(0)},Y^{(0)}\right)$, для которого выполняется следующее условие:

$$L(x_1,\dots,x_n,y_1^{(0)},\dots,y_m^{(0)})\le L(x_1^{(0)},\dots,x_n^{(0)},y_1^{(0)},\dots,y_m^{(0)})\le L(x_1^{(0)},\dots,x_n^{(0)},y_1,\dots,y_m)$$
$$\forall x_j, y_i \ge 0.$$

Теорема Куна–Таккера Для задачи выпуклого программирования, ОДЗ которой обладает свойством регулярности, план $X^{(0)}=(x_1^{(0)},\dots,x_n^{(0)})$ является оптимальным тогда и только тогда, когда $\exists$ вектор $Y^{(0)}=(y_1^{(0)},\dots,y_n^{(0)})$, $(y_i^{(0)}\ge 0,\ i=\overline{1,m})$ такой , что точка $(X^{(0)},Y^{(0)})$ является седловой точкой функции Лагранжа.

Если функции f и g непрерывно дифференцируемы, то аналитически уравнения для теоремы Куна–Таккера выглядят следующем образом:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L_0}{\partial x_j} \le 0 \quad (j=\overline{1,n}) \\ x_j^{(0)} \dfrac{\partial L_0}{\partial x_j} = 0 \quad (j=\overline{1,n}) \\ x_j \ge 0, \quad (j=\overline{1,n}) \\ \dfrac{\partial L_0}{\partial y_i} \ge 0 \quad (i=\overline{1,m}) \\ y_i^{(0)} \dfrac{\partial L_0}{\partial y_i} = 0 \quad (i=\overline{1,m}) \\ y_i \ge 0, \quad (i=\overline{1,m}) \end{cases}$$

Пример:

Найти максимальное значение функции:

$$f = 2x_1 + 4x_2 - x_1^2 - 2x_2^2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 2x_1 - x_2 \le 12 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

$$L = 2x_1 + 4x_2 - x_1^2 - 2x_2^2 + y_1[8 - x_1 - 2x_2] + y_2[12 - 2x_1 + x_2]$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L_0}{\partial x_1} = 2 - 2x_1 - y_1 - 2y_2 \le 0 \\ \dfrac{\partial L_0}{\partial x_2} = 4 - 4x_2 - 2y_1 + y_2 \le 0 \\ \dfrac{\partial L_0}{\partial y_1} = 8 - x_1 - 2x_2 \ge 0 \\ \dfrac{\partial L_0}{\partial y_2} = 12 - 2x_1 + x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1(2 - 2x_1 - y_1 - 2y_2) = 0 \\ x_2(4 - 4x_2 - 2y_1 + y_2) = 0 \\ y_1(8 - x_1 - 2x_2) = 0 \\ y_2(12 - 2x_1 + x_2) = 0 \\ x_1, x_2, y_1, y_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L_0}{\partial x_1} = 2 - 2x_1 - y_1 - 2y_2 + v_1 = 0 \\ \dfrac{\partial L_0}{\partial x_2} = 4 - 4x_2 - 2y_1 + y_2 + v_2 = 0 \\ \dfrac{\partial L_0}{\partial y_1} = 8 - x_1 - 2x_2 - w_1 = 0 \\ \dfrac{\partial L_0}{\partial y_2} = 12 - 2x_1 + x_2 - w_2 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 v_1 = 0 \\ x_2 v_2 = 0 \\ y_1 w_1 = 0 \\ y_2 w_2 = 0 \end{cases}$$

Решаем методом искусственного базиса

$$-Mz_1 - Mz_2 \to \max \qquad z_1, z_2 \geq 0$$

$$x_1^{(0)} = 1,\ x_2^{(0)} = 1,\ w_1 = 5,\ \ w_2 = 11$$

$$y_1 = y_2 = v_1 = v_2 = z_1 = z_2 = 0$$

$$x^* = (1,1),\ f\max = 3.$$