Градиентные методы решения ЗНЛП

Различают два класса данных методов: *барьерные* и *штрафные*.

Барьерные - запрещено выходить за ОДЗ.

Штрафные - позволяет периодически выходить за ОДЗ, но включают штрафные функции, которые возвращают в ОДЗ.

Метод Франка-Вульфа (барьерный метод)

$$f(x_1, \ldots x_n) \to \max \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad (i = \overline{1,m}) \quad (2)$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,n}) \quad (3)$$

$$\nabla f(X^{(k)}) = \left(\frac{\partial f(X^{(k)})}{\partial x_1}; \frac{\partial f(X^{(k)})}{\partial x_2}; \ldots; \frac{\partial f(X^{(k)})}{\partial x_n} \right)$$

$$z = \frac{\partial f(X^{(k)})}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f(X^{(k)})}{\partial x_2} x_2 + \ldots + \frac{\partial f(X^{(k)})}{\partial x_n} x_n \to \max \quad (4)$$

ЗЛП: (4) $\to \max + (2) + (3)$

Пусть точка Z^k – решение ЗЛП:

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} + \lambda_k (Z^{(k)} - X^{(k)})$$

$$0 \le \lambda_k \le 1$$

$$\frac{\partial f(x^{(k+1)})}{\partial \lambda_k} = 0.$$

Если $\left| f(x^{k-1}) - f(x^k) \right| \leq \varepsilon$, где ε - точность решения, то задача решена.

В противном случае, переходим к новой итерации.

Пример:

$$f=2x_1+4x_2-x_1^2-2x_2^2\to\max \quad (1)$$

$$\begin{cases} x_1+2x_2\le 8, \\ 2x_1-x_2\le 12, \end{cases} \quad (2)$$

$$x_1,x_2\ge 0. \quad (3)$$

Решение. Найдем градиент функции: $\nabla f=\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1};\dfrac{\partial f}{\partial x_2}\right)=(2-2x_1;4-4x_2),$

и в качестве исходного допустимого решения задачи возьмем точку $X(0)=(0,0).$

$$z=2x_1+4x_2\to\max \quad (4)$$

ЗЛП: $(4)+(2)+(3)$ $\longrightarrow$

$$z^{(0)}=(0,4)$$

$$x^{(1)}=x^{(0)}+\lambda_0(z^{(0)}-x^{(0)})$$

$$x_1^{(1)}=0+\lambda_0(0-0)=0$$

$$x_2^{(1)}=0+\lambda_0(4-0)=4\lambda_0$$

$$f(x^{(1)}) = 2\cdot 0 + 4\cdot 4\lambda_0 - 0^2 - 2(4\lambda_0)^2 = 16\lambda_0 - 32\lambda_0{}^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda_0} = 16 - 64\lambda_0 = 0$$

$$\lambda_0 = \frac{16}{64} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

$$x^{(1)} = (0;1)$$

$$f(x^{(0)}) = 0$$

$$f(x^{(1)}) = 2$$

(4) $z = 2x_1 \to \max$

ЗЛП: $x^{(2)} = x^{(1)} + \lambda_1 (z^{(1)} - x^{(1)})$

$x_1^{(1)} = \ldots.$ $x_1^{(2)} = \ldots.$

Следующая итерация:

$$x^{(3)} = (0{,}99528;\ 0{,}96321)$$

$$f(x^{(3)}) = 2{,}9937$$

$$f(x^{(3)}) - f(x^{(2)}) = 0{,}0029 < 0{,}01$$

Метод штрафных функций

$$f(x_1,\ldots x_n)\to\max$$

$$g_i(x_1,\ldots x_n)\le b_i \quad (i=\overline{1,m})$$

$$x_j\ge 0 \quad (j=\overline{1,n})$$

Вводим новую функцию: $F=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)+H(x_1,x_2,\ldots,x_n)$.

H – штрафная функция:

$$H=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)g_i(x_1,x_2,\ldots,x_n),$$

$$где\ \alpha_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\begin{cases}0,\text{ если } b_1-g_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)\ge 0\\ \alpha_i,\text{ если } b_1-g_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)<0\end{cases}$$

Координаты следующей точки:

$$x_j^{(k+1)}=\max\left\{0;x_j^{(k)}+\lambda\left[\frac{\partial f(X^{(k)})}{\partial x_j}+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\frac{\partial g_i(X^{(k)})}{\partial x_k}\right]\right\}$$

В ***методе Эрроу-Гурвица:*** $\alpha_i^{(k)}=\max\left\{0;\alpha_i^{(k-1)}-\lambda g_i(x^{(k-1)})\right\}$.

Метод наискорейшего спуска

$$X_{0}, X_{1}, \ldots, X_{k}, X_{k+1}, \ldots$$

$$X_{k+1} = X_{k} + \lambda \cdot l$$

$(l = l_1, \ldots, l_n) = \nabla f$ - если на max

$(l = l_1, \ldots, l_n) = -\nabla f$ - если на min

$$g_i(x_1, \ldots, x_n) \le b_i \ (\mathrm{i} = \overline{1, \mathrm{m}})$$

$$\Delta Z = Z(X_{k+1}) - Z(X_k)$$

$\Delta z \to \max(\max)$ $\Delta z \to \min(\min)$

$$X_{k+1} = X_{k} + \lambda \cdot \Delta Z(X_{k}) \quad (\lambda > 0)$$ - (max)

$$X_{k+1} = X_{k} - \lambda \cdot \Delta Z(X_{k}) \quad (\lambda > 0)$$ - (min)

$$\frac{\partial \Delta Z}{\partial \lambda}=0, \qquad \frac{\partial Z(X_{k+1})}{\partial x_1}*\frac{\partial Z(X_k)}{\partial x_1}+\frac{\partial Z(X_{k+1})}{\partial x_2}*\frac{\partial Z(X_k)}{\partial x_2}+\ldots+\frac{\partial Z(X_{k+1})}{\partial x_n}*\frac{\partial Z(X_k)}{\partial x_n}$$

$$\nabla Z(X_{k+1})\cdot\nabla Z(X_k)=0$$

Если ОДЗ линейна:

$\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \quad (i=\overline{1,m})$, тогда $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^{(k+1)}=b_i$ (на границе).

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j^{(k)}+\lambda l_j)=b_i$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}+\lambda\sum a_{ij}l_j=b_i \longrightarrow \lambda=\frac{b_i-\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}}{\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}l_j}$$

Метод кусочно-линейной аппроксимации

Функция $f(x_1,...,x_n)$ называется **сепарабельной**, если она может быть представлена в виде суммы функций, каждая из которых зависит только от одной переменной.

$$f(x_1,...,x_n)=\sum_{j=1}^{n} f_j(x_j)$$

$$z=f(x_1,...,x_n)=\sum f_j(x_j)\to \max$$

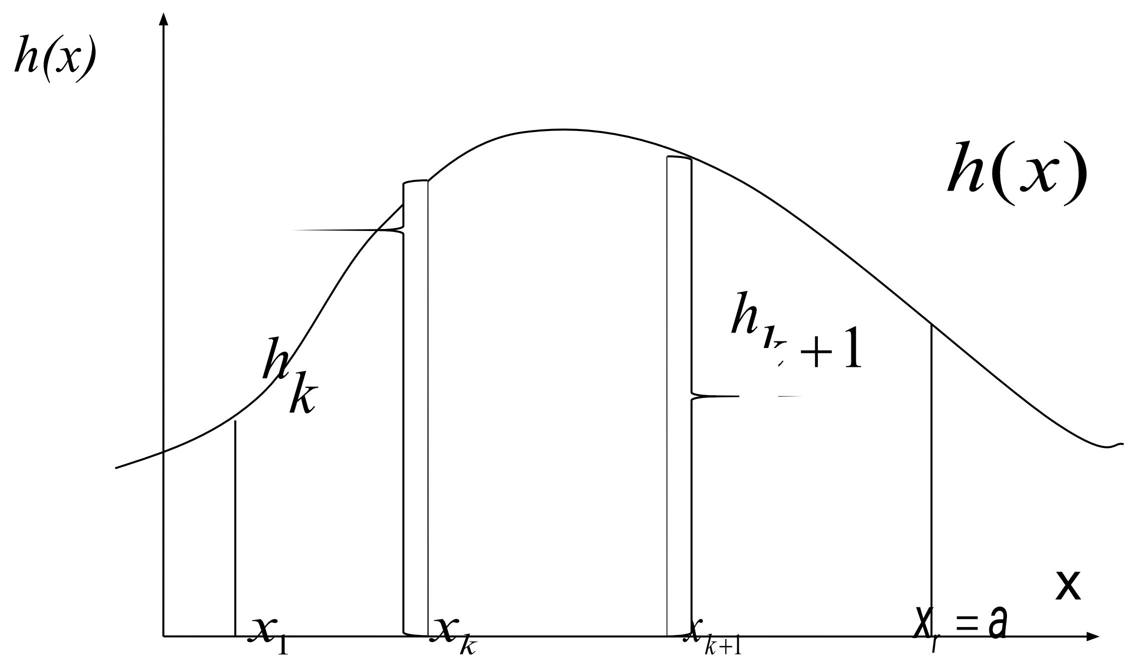
$$\sum g_{ij}(x_j)\le b_i \quad (i=\overline{1,m})$$

$$x_j\ge 0 \quad (j=\overline{1,n})$$

$$z=x_1^2+x_2^2+\ln x_1+25-x_2+13x_1$$

$$f_1(x_1)=x_1^2+\ln x_1+25+13x_1$$

$$f_2=x_2^2-x_2$$



$$\frac{h(x)-h_k}{h_{k+1}-h_k}=\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}=\lambda$$

$$\begin{cases} h(x)=\lambda h_{k+1}+(1-\lambda)h_k, \\ x=\lambda x_{k+1}+(1-\lambda)x_k \end{cases} \qquad 0\le\lambda\le 1$$

$$1-\lambda=\lambda_k$$

$$\lambda=\lambda_{k+1}$$

$$\begin{cases} x=\lambda_k x_k+\lambda_{k+1}x_{k+1} \\ h(x)=\lambda_k h_k+\lambda_{k+1}h_{k+1} \end{cases}$$

- параметрическое уравнение отрезка

$$\lambda_k+\lambda_{k+1}=1$$

$$\lambda_k,\lambda_{k+1}\ge 0$$

$$\begin{cases} x=\sum\limits_{k=0}^{r}\lambda_k x_k \\ h(x)=\sum\limits_{k=0}^{r}\lambda_k h_k \end{cases}$$

$$\sum_{k=0}^{r}\lambda_k=1, \quad \lambda_k\ge 0 \quad (k=\overline{1,r})$$

$$\hat{F} = \sum_{j=1}^{n} \hat{f}_j(x_j)$$

$$\hat{f}_j(x_j) = \sum_{k=0}^{r_j} f_{kj}\lambda_{kj}$$

$$\hat{g}_{ij}(x_j) = \sum_{k=0}^{r_j} \lambda_{kj} g_{kij}$$

$$(i = \overline{1,m})$$

$$f_{kj} = f_j(x_k);$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,n})$$

$$g_{kij} = g_{ij}(x_k);$$

$$x_j = \sum_{k=0}^{r_j} \lambda_{kj} x_{kj}$$

$$F = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{r_j} f_{kj} \lambda_{kj}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{r_j} g_{kij} \lambda_{kj} \le b_i \quad (i = \overline{1,m})$$

$$\sum_{k=0}^{r_j} \lambda_{kj} = 1 \quad (j = \overline{1,n}) \quad \lambda_{kj} \ge 0 \ \forall \ k, j$$

Пример:

$$F = x_2 - x_1^2 + 6x_1 - 9 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 24 \\ x_1 + 2x_2 \le 15 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 24 \\ x_2 \le 4 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

$$f_1(x_1) = -x_1^2 + 6x_1 - 9$$

$$f_2(x_2) = x_2$$

$$x_1 \in [0,8]$$

$$x_{01} = 0, x_{11} = 1, x_{01} = 0, x_{21} = 2, x_{31} = 3, x_{41} = 4, x_{51} = 5, x_{61} = 6, x_{71} = 7, x_{81} = 8.$$

x_{k1}	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f_1(x_{k1})$	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9	-16	-25

Решение: $f_1(x_1) = -9\lambda_{01} - 4\lambda_{11} - \lambda_{21} - \lambda_{41} - 4\lambda_{51} - 9\lambda_{61} - 16\lambda_{71} - 25\lambda_{81}$

$$x_1 = 0\cdot\lambda_{01} + 1\cdot\lambda_{11} + 2\cdot\lambda_{21} + 3\cdot\lambda_{31} + 4\cdot\lambda_{41} + 5\cdot\lambda_{51} + 6\cdot\lambda_{61} + 7\cdot\lambda_{71} + 8\cdot\lambda_{81}$$

$$F = f_1(x_1) + f_2(x_2)$$

Пример:

$$\hat{F} = -9\lambda_{01} - 4\lambda_{11} - \lambda_{21} - \lambda_{41} - 4\lambda_{51} - 9\lambda_{61} - 16\lambda_{71} - 25\lambda_{81} + x_2 \to \max$$

$$2\cdot\lambda_{11} + 4\cdot\lambda_{21} + 6\cdot\lambda_{31} + 8\cdot\lambda_{41} + 10\cdot\lambda_{51} + 12\cdot\lambda_{61} + 14\cdot\lambda_{71} + 16\cdot\lambda_{81} + x_2 + x_3 = 24$$

$$\lambda_{11} + 2\cdot\lambda_{21} + 3\cdot\lambda_{31} + 4\cdot\lambda_{41} + 5\cdot\lambda_{51} + 6\cdot\lambda_{61} + 7\cdot\lambda_{71} + 8\cdot\lambda_{81} + 2x_2 + x_4 = 15$$

$$3\cdot\lambda_{11} + 6\cdot\lambda_{21} + 9\cdot\lambda_{31} + 12\cdot\lambda_{41} + 15\cdot\lambda_{51} + 18\cdot\lambda_{61} + 21\cdot\lambda_{71} + 24\cdot\lambda_{81} + 2x_2 + x_5 = 24$$

$$x_2 + x_6 = 4$$

$$\lambda_{01} + \lambda_{11} + \lambda_{21} + \lambda_{31} + \lambda_{41} + \lambda_{51} + \lambda_{61} + \lambda_{71} + \lambda_{81} = 1$$

$$x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0,$$

$$\lambda_k \geq 0, (k = 1, \ldots 8)$$

$$x_1^* = 3, x_2^* = 4, F_{\max} = 4$$