

8.4. ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Пусть переменная y есть функция от переменной u , $y=f(u)$.

И пусть переменная u есть функция от переменной x , $u=\varphi(x)$.

То есть задана сложная функция

$$y = f[\varphi(x)]$$

ТЕОРЕМА

Если $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$ – дифференцируемые функции своих аргументов, то производная сложной функции существует и равна производной данной функции по промежуточному аргументу, умноженной на производную самого промежуточного аргумента по независимой переменной:

$$y' = f'(u) \cdot u'_x$$

Доказательство:

Дадим аргументу x приращение Δx , не равное 0, тогда функции $u=\varphi(x)$, $y=f(u)$ получают приращения Δu и Δy .

Предположим, что Δu не равно нулю, тогда в силу дифференцируемости функции $y=f(u)$ получим:

$$\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u)$$

Причем, величина $f'(u)$ не зависит от Δu .

На основании теоремы о связи бесконечно малых величин с пределами функций функцию, стоящую под знаком предела, можно представить как сумму этого предела и бесконечно малой величины:

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u) + \alpha(\Delta u)$$

где $\alpha(\Delta u)$ – бесконечно малая величина при $\Delta u \rightarrow 0$

Отсюда:
$$\Delta y = f'(u) \cdot \Delta u + \alpha(\Delta u) \cdot \Delta u$$

Делим обе части равенства на Δx :

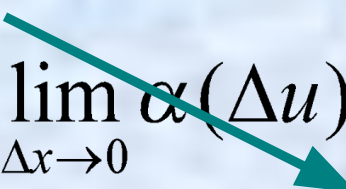
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u) \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha(\Delta u) \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Т.к. по условию функция $u=\varphi(x)$ дифференцируема, то она непрерывна в точке x .

Следовательно, при $\Delta x \rightarrow 0$ и $\Delta u \rightarrow 0$

$$\alpha(\Delta u) \rightarrow 0$$

Переходим в последнем равенстве к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\Delta u}{\Delta x}}_{u'_x} \cdot f'(u) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta u) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \\ &= f'(u) \cdot u'_x \end{aligned}$$


Правило дифференцирования сложной функции
можно записать иначе:

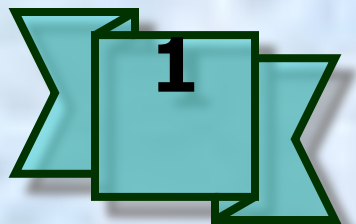
$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

ИЛИ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Примеры.

Найти производные сложных функций:

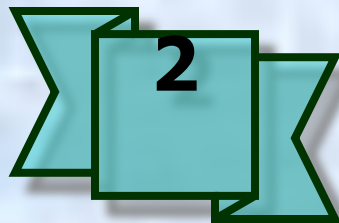


$$y = (\sqrt{x} + 5)^3$$

Решение:

$$y' = 3 \cdot (\sqrt{x} + 5)^2 \cdot (\sqrt{x} + 5)' =$$

$$= 3 \cdot (\sqrt{x} + 5)^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} (\sqrt{x} + 5)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$$



$$y = \sqrt[3]{\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}}$$

Решение:

$$y' = \frac{1}{3} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)' =$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{(x^2 - 1)' \cdot (x^2 + 1) - (x^2 + 1)' \cdot (x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2} =$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{2x \cdot (x^2 + 1) - 2x \cdot (x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2} =$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{\cancel{2x^3} + 2x - \cancel{2x^3} + 2x}{(x^2 + 1)^2} =$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}$$