11.4. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГИРОВАНИЯ

1. Непосредственное интегрирование

Вычисление интегралов с помощью основных свойств неопределенного интеграла и таблицы интегралов называется <u>непосредственным или элементарным интегрированием</u>.

Примеры.

Вычислить интегралы:

1

$$\int (2\sin x + 6 - 3x^2)dx$$

Решение:

$$\int (2\sin x + 6 - 3x^2)dx =$$

$$= \int 2\sin x dx + \int 6dx - \int 3x^2 dx =$$

$$= 2\int \sin x dx + 6\int dx - 3\int x^2 dx =$$

$$= -2\cos x + 6x - x^3 + C$$

2

$$\int \frac{3x^4 - x^3 + x + 2}{x^2}\,dx$$

Решение:

$$\int \frac{3x^4 - x^3 + x + 2}{x^2} dx =$$

$$= \int \left(3x^2 - x + \frac{1}{x} + 2\frac{1}{x^2} \right) dx =$$

$$= 3\int x^2 dx - \int x dx + \int \frac{1}{x} dx + 2\int \frac{1}{x^2} dx =$$

$$= x^3 - \frac{x^2}{2} + \ln|x| - \frac{2}{x} + C$$

3

$$\int\left(\frac{2}{x^{2}+1}+\sin^{2}\frac{x}{2}\right)dx$$

Решение:

$$\int\left(\frac{2}{x^2+1}+\sin^2\frac{x}{2}\right)dx=$$

$$=2\int\frac{1}{x^2+1}dx+\int\sin^2\frac{x}{2}dx=$$

$$=2arctgx+\int\frac{1}{2}(1-\cos x)dx=$$

$$=2arctgx+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\sin x+C$$

2. Метод замены переменной или метод подстановки

<u>Метод замены переменной</u> описывается формулой:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt$$

1

Где *x=φ(t)* – функция, дифференцируемая на рассматриваемом промежутке.

Покажем справедливость этой формулы.

Найдем производную по *t* от левой и правой части выражения (1):

$$\left(\int f(x)dx\right)_t' = \left(\int f(x)dx\right)_x' \cdot x_t' = \underline{f(x)\cdot\varphi'(t)}$$

$$\left(\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt\right)_t' =$$

$$= f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t) = \underline{f(x)\cdot\varphi'(t)}$$

Получили одинаковый результат, следовательно по следствию из теоремы Лагранжа левая и правая части выражения (1) отличаются на некоторую постоянную.

Т.к. сами неопределенные интегралы определены с точностью до произвольного постоянного слагаемого, то эту постоянную можно опустить.

Т.об,

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt$$

Полученная формула показывает, что переходя к новой переменной, достаточно выполнить замену переменной в подынтегральном выражении.

Удачная замена переменной позволяет упростить исходный интеграл и в некоторых случаях свести его к табличному.

Примеры.

Вычислить интегралы:

1

$$\int x(x-1)^{12}\,dx$$

Решение:

$$\int x(x-1)^{12}\,dx = \left| \begin{matrix} x-1=t \\ x=t+1 \\ dx=dt \end{matrix} \right| =$$

$$= \int (t+1)\cdot t^{12}\,dt = \int t^{12}\,dt + \int t^{13}\,dt =$$

$$= \frac{t^{13}}{13} + \frac{t^{14}}{14} + C = \frac{(x-1)^{13}}{13} + \frac{(x-1)^{14}}{14} + C$$

2

$$\int \sin^4 x \cdot \cos x dx$$

Решение:

$$\int \sin^4 x \cdot \underbrace{\cos x dx}_{dt} = \left| \begin{matrix} \sin x = t \\ dt = \cos x dx \end{matrix} \right| =$$

$$= \int t^4 dt = \frac{1}{5} t^5 + C = \frac{1}{5} \sin^5 x + C$$

Теорема.

Пусть F(x) – некоторая первообразная для функции f(x).

Тогда

$$\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}\cdot F(kx+b)+C$$

Примеры.

Вычислить интегралы:

1

$$\int \sqrt[3]{3-x}\,dx$$

Решение:

$$\int \sqrt[3]{3-x}\,dx = \begin{vmatrix} k=-1 \\ b=3 \end{vmatrix} = -\frac{3}{4}(3-x)^{\frac{4}{3}} + C$$

2

$$\int \frac{1}{4x+3}\,dx$$

Решение:

$$\int \frac{1}{4x+3}\,dx = \left| \begin{matrix} k = 4 \\ b = 3 \end{matrix} \right| = \frac{1}{4}\ln\left|4x+3\right| + C$$

3. Интегрирование по частям

Теорема.

Пусть функции u(x) и v(x) определены и дифференцируемы на промежутке X и функция

$$u'(x)\cdot v(x)$$

имеет первообразную на этом промежутке.

Тогда функция

$$v'(x)\cdot u(x)$$

тоже имеет первообразную на этом промежутке и справедлива формула

$$\int u(x)\cdot v'(x)dx = u(x)\cdot v(x) - \int v(x)\cdot u'(x)dx$$

Доказательство:

Найдем производную произведения данных функций:

$$\left(u(x)\cdot v(x)\right)' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$$

Отсюда выражаем второе слагаемое в правой части выражения:

$$u(x)\cdot v'(x) = \left(u(x)\cdot v(x)\right)' - u'(x)\cdot v(x)$$

Слагаемые в правой части имеют первообразную на промежутке X по условию теоремы, следовательно, левая часть тоже имеет первообразную на этом промежутке и интегрируя равенство, имеем:

$$\int u(x)\cdot v'(x)dx=\underbrace{\int\left(u(x)\cdot v(x)\right)'dx}_{u(x)\cdot v(x)}-\int u'(x)\cdot v(x)dx$$

$$\Downarrow$$

$$\int u(x)\cdot v'(x)dx=u(x)\cdot v(x)-\int u'(x)\cdot v(x)dx$$

Поскольку

$$u'(x)dx = du$$

$$v'(x)dx = dv$$

То последнее равенство часто записывают в виде:

$$\boxed{\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du}$$

формула интегрирования по частям

Примеры.

Вычислить интегралы:

1

$$\int x \cdot e^x dx$$

Решение:

$$\int x \cdot e^x dx = \begin{vmatrix} u = x & dv = e^x dx \\ du = dx & v = e^x \end{vmatrix} =$$

$$= x \cdot e^x - \int e^x dx = \underline{x \cdot e^x - e^x + C}$$

2

$$\int \ln x dx$$

Решение:

$$\int \ln x dx = \left| \begin{array}{cc} u = \ln x & dv = dx \\ du = \dfrac{1}{x} dx & v = x \end{array} \right| =$$

$$= x \cdot \ln x - \int \frac{x}{x} dx = \underline{x \cdot \ln x - x + C}$$

3

$$\int x^2 \cdot \cos x dx$$

Решение:

$$\int x^2 \cdot \cos x dx = \left| \begin{matrix} u = x^2 & dv = \cos x dx \\ du = 2x dx & v = \sin x \end{matrix} \right| =$$

$$= x^2 \cdot \cos x - \int 2x \cdot \sin x dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = x & dv = \sin x dx \\ du = dx & v = -\cos x \end{matrix} \right| =$$

$$= x^2 \cdot \cos x + 2x \cdot \cos x - 2\int \cos x dx =$$

$$= \underline{x^2 \cdot \cos x + 2x \cdot \cos x - 2\sin x + C}$$

Можно показать, что формула интегрирования по частям применима для следующих типов интегралов:

$$\int x^n \cdot e^{ax} dx$$

$$\int x^n \cdot \sin mx dx$$

$$\int x^n \cdot \cos mx dx$$

$$\int x^k \cdot \ln^n x dx$$

$$\int x^k \cdot \arcsin x dx$$

$$\int x^k \cdot \arccos x dx$$

$$\int x^k \cdot arctgxdx$$

$$\int x^k \cdot arcctgxdx$$

Где *a*, *m*, *k* – действительные числа, *n* – целое положительное число.