11.6. Интегрирование некоторых видов иррациональностей

В ряде случаев замена переменной позволяет свести интегралы от иррациональных функций к интегралам от рациональных.

Пусть *R(u,v)* – функция от переменных *u,v* и некоторых постоянных, которая построена с использованием всего четырех действий: сложения, вычитания, умножения и деления, например:

$$R(u,v) = u^2 + \frac{5}{v}$$

1

Интегралы вида:

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{x}\right)dx$$

Замена переменной:

$$t = \sqrt[n]{x}$$

Пример.

Вычислить интеграл:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,dx$$

Решение

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,dx = \left| \begin{array}{c} t=\sqrt[6]{x} \\ x=t^6 \\ dx=6t^5dt \end{array} \right| = \int \frac{6t^5}{t^3+t^2}\,dt =$$

$$= 6\int \frac{t^3}{t+1}\,dt = \left| \begin{array}{c} t+1=u \\ dt=du \end{array} \right| = 6\int \frac{(u-1)^3}{u}\,du =$$

$$= 6\int \frac{u^3-3u^2+3u-1}{u}\,du =$$

$$= 6\int u^2 du - 18\int u du + 18\int du - 6\int \frac{1}{u} du =$$

$$= 2u^3 - 9u^2 + 18u - 6\ln|u| + C =$$

$$= 2(t+1)^3 - 9(t+1)^2 + 18(t+1) -$$

$$- 6\ln|t+1| + C =$$

$$= 2(\sqrt[6]{x}+1)^3 - 9(\sqrt[6]{x}+1)^2 + 18(\sqrt[6]{x}+1) -$$

$$- 6\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right| + C$$

2

Интегралы вида:

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$$

Замена переменной:

$$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

Пример.

Вычислить интеграл:

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{1}{1+x}\,dx$$

Решение

$$\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{1}{1+x}dx=\left|\begin{array}{ll} t=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} & x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx=-\dfrac{4t}{(1+t^2)^2} & 1+x=\dfrac{2}{1+t^2}\end{array}\right|=$$

$$=\int t\cdot\frac{\cancel{1+t^2}}{2}\cdot\left(-\frac{4t}{(1+t^2)^{\cancel{2}}}\right)dt=$$

$$=-2\int\frac{t^2}{1+t^2}dt=-2\int\frac{(t^2+1)-1}{1+t^2}dt=$$

$$= -2\int \frac{\cancel{(t^2+1)}}{\cancel{1+t^2}}\,dt + 2\int \frac{1}{1+t^2}\,dt =$$

$$= -2t + 2arctgt + C =$$

$$= -2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + 2arctg\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C$$

3

Интегралы вида:

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

Под корнем выделяется полный квадрат и делается линейная замена переменной, так что интеграл сводится к виду:

$$\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ex^2+f}}dx = M\underbrace{\int \frac{x}{\sqrt{ex^2+f}}dx}_{1} + N\underbrace{\int \frac{1}{\sqrt{ex^2+f}}dx}_{2}$$

Для нахождения первого интеграла делается замена:

$$\boxed{t = ex^2 + f}$$

Тогда

$$\int \frac{x}{\sqrt{ex^2+f}}dx = \begin{vmatrix} ex^2+f=t \\ dt=2exdx \end{vmatrix} = \frac{1}{2e}\int \frac{1}{\sqrt{t}}dt =$$

$$= \frac{1}{e}\sqrt{t}+C = \frac{1}{e}\sqrt{ex^2+f}+C$$

Второй интеграл при $e \cdot f > 0$ **будет табличным:**

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+C$$

а при $e \cdot f < 0$ **будет табличным:**

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{a}+C$$

Примеры.

1

Вычислить интеграл:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4x+5}}dx$$

Решение.

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4x+5}}dx = \int \frac{x}{\sqrt{(x+2)^2+1}}dx =$$

$$= \left| \begin{array}{c} x+2=t \\ dt=dx \end{array} \right| = \int \frac{t-2}{\sqrt{t^2+1}}dt =$$

$$= \int \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}dt - 2\int \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}dt =$$

$$= \left| \begin{array}{c} t^2+1=u \\ du=2tdt \end{array} \right| =$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{u}}du-2\ln\left|t+\sqrt{t^{2}+1}\right|=$$

$$=\sqrt{u}-2\ln\left|t+\sqrt{t^{2}+1}\right|+C=$$

$$=\sqrt{t+1}-2\ln\left|t+\sqrt{t^{2}+1}\right|+C=$$

$$=\sqrt{x+2+1}-2\ln\left|x+2+\sqrt{(x+2)^{2}+1}\right|+C$$

2

Вычислить интеграл:

$$\int \frac{x}{\sqrt{8+4x-4x^2}}\,dx$$

Решение

$$\int \frac{x}{\sqrt{8+4x-4x^2}}dx = \int \frac{x}{\sqrt{9-(1-2x)^2}}dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} 1-2x = t \\ dt = -2dx \end{matrix} \right| = \int \frac{\frac{1-t}{2}}{\sqrt{9-t^2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) dt =$$

$$= -\frac{1}{4}\int \frac{1-t}{\sqrt{9-t^2}}dt =$$

$$= -\frac{1}{4}\int \frac{1}{\sqrt{9-t^2}}dt + \frac{1}{4}\int \frac{t}{\sqrt{9-t^2}}dt =$$

$$= \left| \begin{matrix} 9-t^2 = u \\ du = -2tdt \end{matrix} \right| = \ -\frac{1}{4}\arcsin\frac{t}{3} - \frac{1}{8}\int \frac{1}{\sqrt{u}}\,du =$$

$$= -\frac{1}{4}\arcsin\frac{t}{3} - \frac{1}{4}\sqrt{u} + C =$$

$$= -\frac{1}{4}\arcsin\frac{t}{3} - \frac{1}{4}\sqrt{9-t^2} + C =$$

$$= -\frac{1}{4}\arcsin\frac{1-2x}{3} - \frac{1}{4}\sqrt{9-(1-2x)^2} + C$$