12.2. СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛЕННО ИНТЕГРАЛА

Необходимое условие сущес определенного интеграла

Интегрируемая на отрезке [a,b] функция y=f(x) ограничена на этом отрезке.

Достаточное условие сущес
определенного интеграла

Если на отрезке [a,b] функция y=f(x) непрерывна, то она интегрируема на этом отрезке.

Свойства определенного инт

1

Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла.

$$\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx$$

Доказательство:

- Пусть фиксировано разбиение отрезка [a,b] и выбор точек

$$\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n$$

Рассмотрим интегральную сумму:

$$\sum_{i=1}^{n} k \cdot f(\xi_i)\Delta x_i = k \cdot \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

- Переходим к пределу в левой и правой части равенства при $\max \Delta x_i \to 0$

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} k \cdot f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} k \cdot \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i =$$

$$= k \cdot \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

Следовательно по определению:

$$\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx$$

2

Определенный интеграл от алгебраической суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) интегралов от этих функций.

$$\int_a^b \left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

3

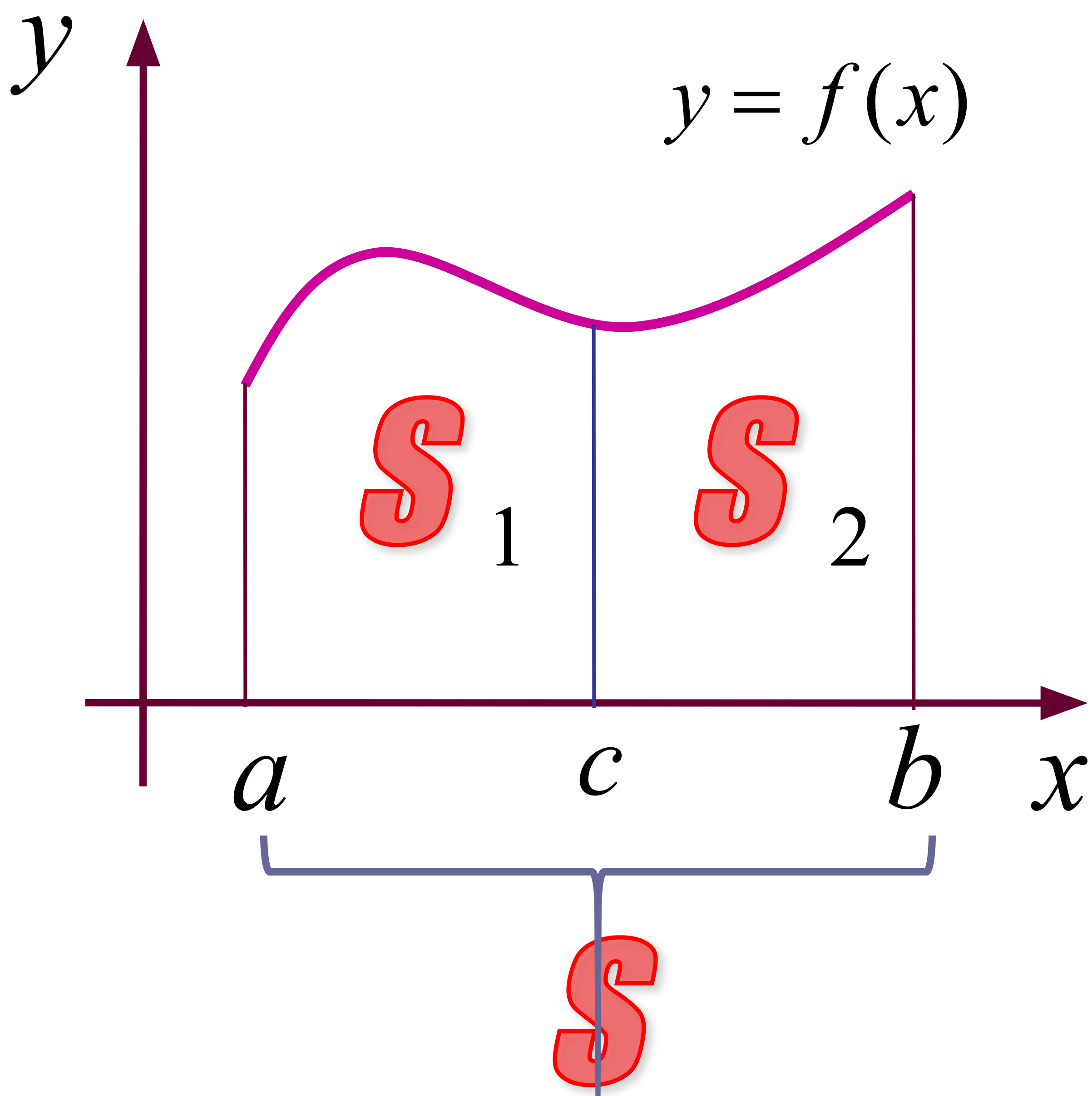
Если отрезок интегрирования разбит на части, то интеграл на всем отрезке равен сумме интегралов по каждому из участков разбиения.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Геометрически это означает, что если a<c<b и функция y=f(x) неотрицательна на [a,b], то согласно геометрическому смыслу определенного интеграла

$$\int_a^b f(x)dx = S \quad \int_a^c f(x)dx = S_1 \quad \int_c^b f(x)dx = S_2$$

$$S_1 + S_2 = S$$



y
y = f(x)
S 1
S 2
a
c
b
x
S

4

Если на [a,b], где a<b, $f(x) \le g(x)$

то

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx}$$

Доказательство:

Пусть фиксировано разбиение отрезка [a,b] и выбор точек $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n$

Если $f(x) \le g(x)$ **то для интегральных сумм:**

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i$$

Переходим к пределу в левой и правой части неравенства при $\max \Delta x_i \to 0$

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \le \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i$$

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

$\blacksquare$

Следствие.

Пусть на [a,b], где a<b,

$$m \le f(x) \le M$$

где m и M некоторые числа. Тогда

$$\boxed{m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)}$$

Доказательство:

По свойству 4 имеем:

$$\int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M\,dx$$

По свойству 1 и геометрическому смыслу определенного интеграла:

$$\int_a^b m\,dx = m(b-a)$$

$$\int_a^b M\,dx = M(b-a)$$

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

5

Теорема о среднем

Если на [a,b], где a<b, функция y=f(x) непрерывна, то найдется такое значение

$$\xi \in [a,b]$$

что

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = f(\xi)\cdot(b-a)}$$

Доказательство.

- По свойству функции, непрерывной на отрезке, для произвольного значения

$$x \in [a,b]$$

- справедливо неравенство:

$$m \le f(x) \le M$$

Где m и M – наименьшее и наибольшее значения функции на отрезке. Тогда

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$$

$$m\le\int_a^b f(x)dx\cdot\frac{1}{b-a}\le M$$

Но функция, непрерывная на отрезке, принимает любое значение, заключенное между ее наименьшим и наибольшим значениями, поэтому найдется такое число

$$\xi\in[a,b]$$

что

$$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)\cdot(b-a)$$

Пусть

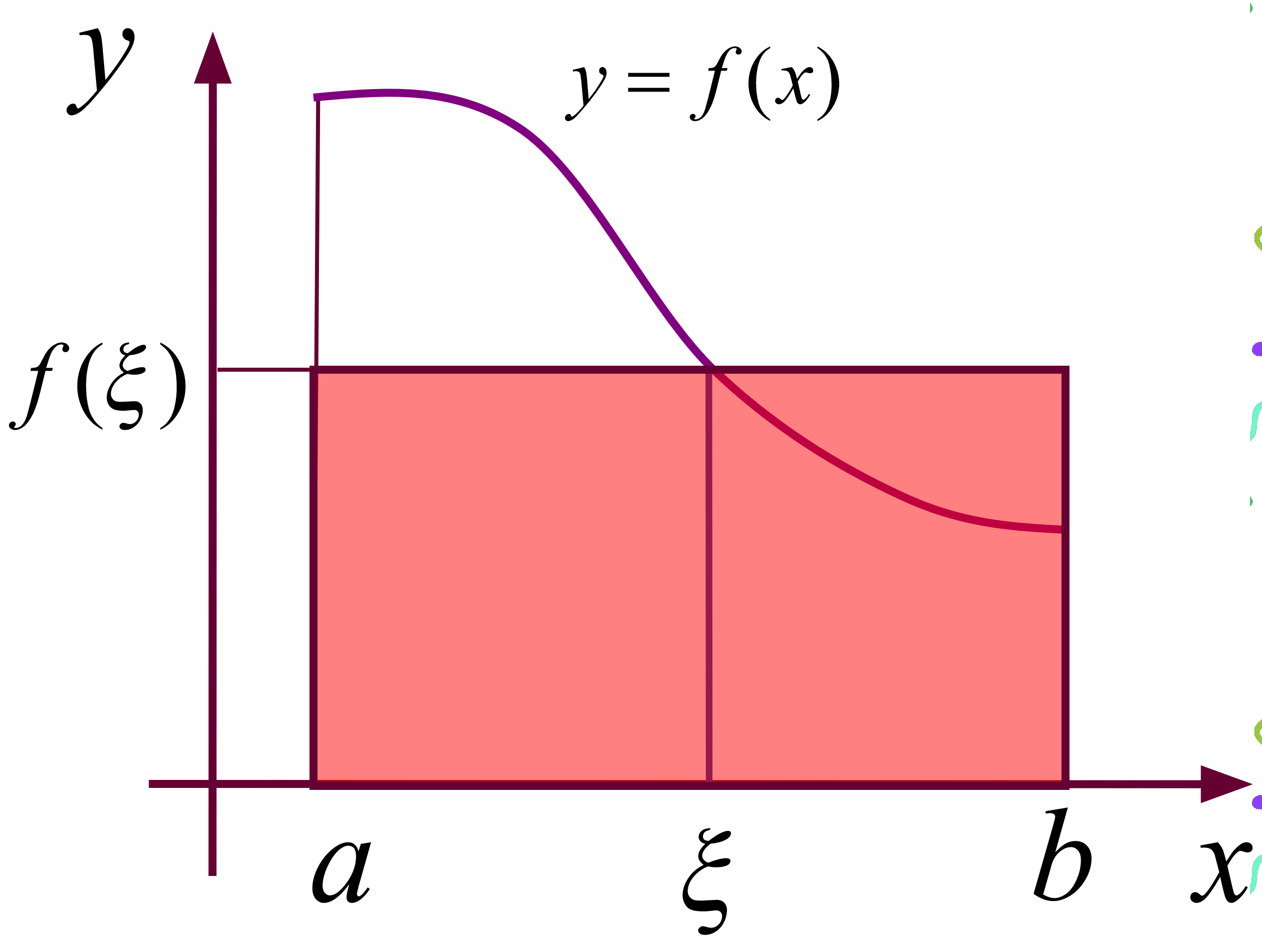
$$f(x) \geq 0$$

- Тогда теорема о среднем утверждает, что найдется такая точка

$$\xi \in [a,b]$$

- что площадь под кривой *y=f(x)* на [a,b] равна площади прямоугольника со сторонами

$$f(\xi) \quad и \quad (b-a)$$


y
y = f(x)
f(ξ)
a
ξ
b
x

Равенство

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)\cdot(b-a)$$

называется формулой среднего значения.

$f(\xi)$ называется средним значением функции.

6

Геометрический смыс
определенного интег

Если на [a,b] функция y=f(x) неотрицательна, то площадь под этой кривой численно равна определенному интегралу

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = S}$$