12.3. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ КАК ФУНКЦИЯ ВЕРХНЕГО ПРЕДЕЛА

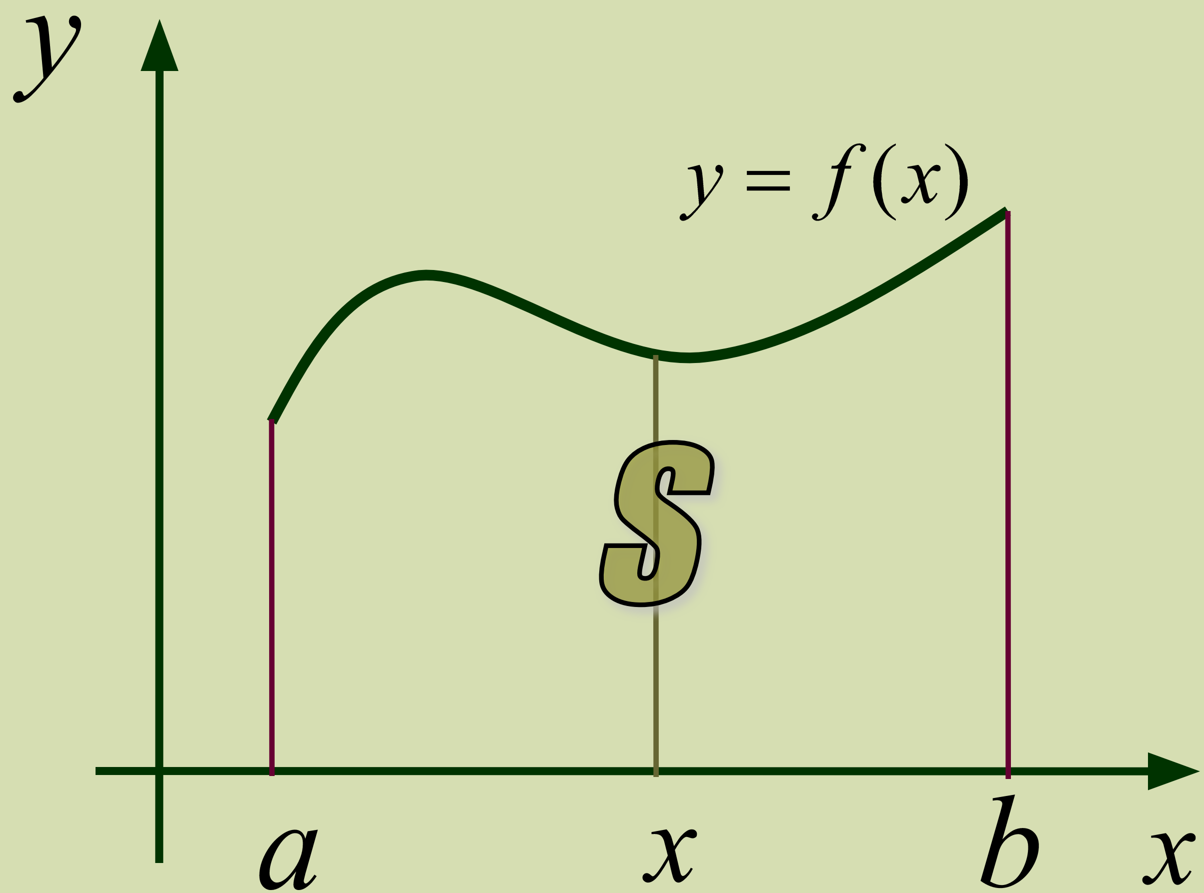
Пусть функция *y=f(x)* интегрируема на [a,b]. Тогда она будет интегрируема и на произвольном отрезке [a,x], где *a<x<b*.

Пусть

$$\int_a^x f(x)dx = \int_a^x f(t)dt = \Phi(x)$$

Функция Ф(x) называется интегралом с переменным верхним пределом.

Если функция *f(x)>0* на [a,b], то значение функции *Ф(x)* в точке *x* равно площади под кривой *y=f(x)* на отрезке [a,x].



СВОЙСТВА ИНТЕГРАЛА С ПЕРЕМЕННЫМ ВЕРХНИМ ПРЕДЕЛОМ

Теорема 1.

Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a,b], то функция Ф(x) также непрерывна на [a,b].

Доказательство:

Пусть приращение Δx таково, что $x + \Delta x \in [a, b]$

По свойству определенного интеграла

$$\Phi(x + \Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt = \int_a^{x} f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt =$$

$$= \Phi(x) + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

По теореме о среднем найдется $\xi \in [x, x + \Delta x]$

что

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = f(\xi) \cdot \Delta x$$

$$\Rightarrow \quad \Phi(x+\Delta x)=\Phi(x)+f(\xi)\cdot\Delta x$$

Так как $\xi \in [a,b]$ то $m \le f(\xi) \le M$

где *m* и *M* - наименьшее и наибольшее значения функции на [a,b].

Переходим в последнем равенстве к пределу при $\Delta x \to 0$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Phi(x+\Delta x)=\Phi(x)+\lim_{\Delta x\to 0} \underbrace{f(\xi)\cdot\Delta x}_{0}=\Phi(x)$$

Это и будет означать, что функция Ф(x) непрерывна на [a,b].

Теорема 2.

Пусть функция f(x) непрерывна на отрезке [a,b]. Тогда в каждой точке

$$x \in [a, b]$$

производная функции Ф(x) по переменному верхнему пределу равна подынтегральной функции:

$$\Phi'(x) = \left(\int_a^x f(x)dx \right)' = f(x)$$

Доказательство:

Из теоремы 1 следует, что

$$\Phi(x+\Delta x)=\Phi(x)+f(\xi)\cdot\Delta x$$

$$f(\xi)=\frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x}$$

где $\xi\in[x,x+\Delta x]$

Переходим к пределу при $\Delta x\to 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(\xi) = \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x}}_{\Phi'(x)}$$

В силу непрерывности функции *f(x)*

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(\xi) = f(x)$$

$$\Rightarrow \quad \Phi'(x) = f(x)$$

Следствие:

Если функция y=f(x) непрерывна на отрезке [a,b], то на этом отрезке существует первообразная этой функции.

Одной из первообразных является функция

$$\int_a^x f(t)dt = \Phi(x)$$

Поскольку любая другая первообразная отличается от Ф(х) на постоянную величину, то связь между неопределенным и определенным интегралом имеет вид:

$$\int f(x)dx = \int_a^x f(t)dt + C$$