# 12.7. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

**Рассмотрим интегралы, у которых один или оба предела интегрирования бесконечны, или когда функция не ограничена на отрезке интегрирования.**

**Такие интегралы называются несобственными.**

# 1. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования (1 рода)

**Пусть функция *y=f(x)* определена и интегрируема на произвольном отрезке [*a,t*].**

**Т.е. для *t>a* определена функция**

$$\Phi(t) = \int_a^t f(x)dx$$

**Несобственным интегралом**

$$\int_a^{\infty} f(x)dx$$

**от функции y=f(x) на полуинтервале** $[a,+\infty)$

**называется предел функции Φ(t) при** $t \to \infty$

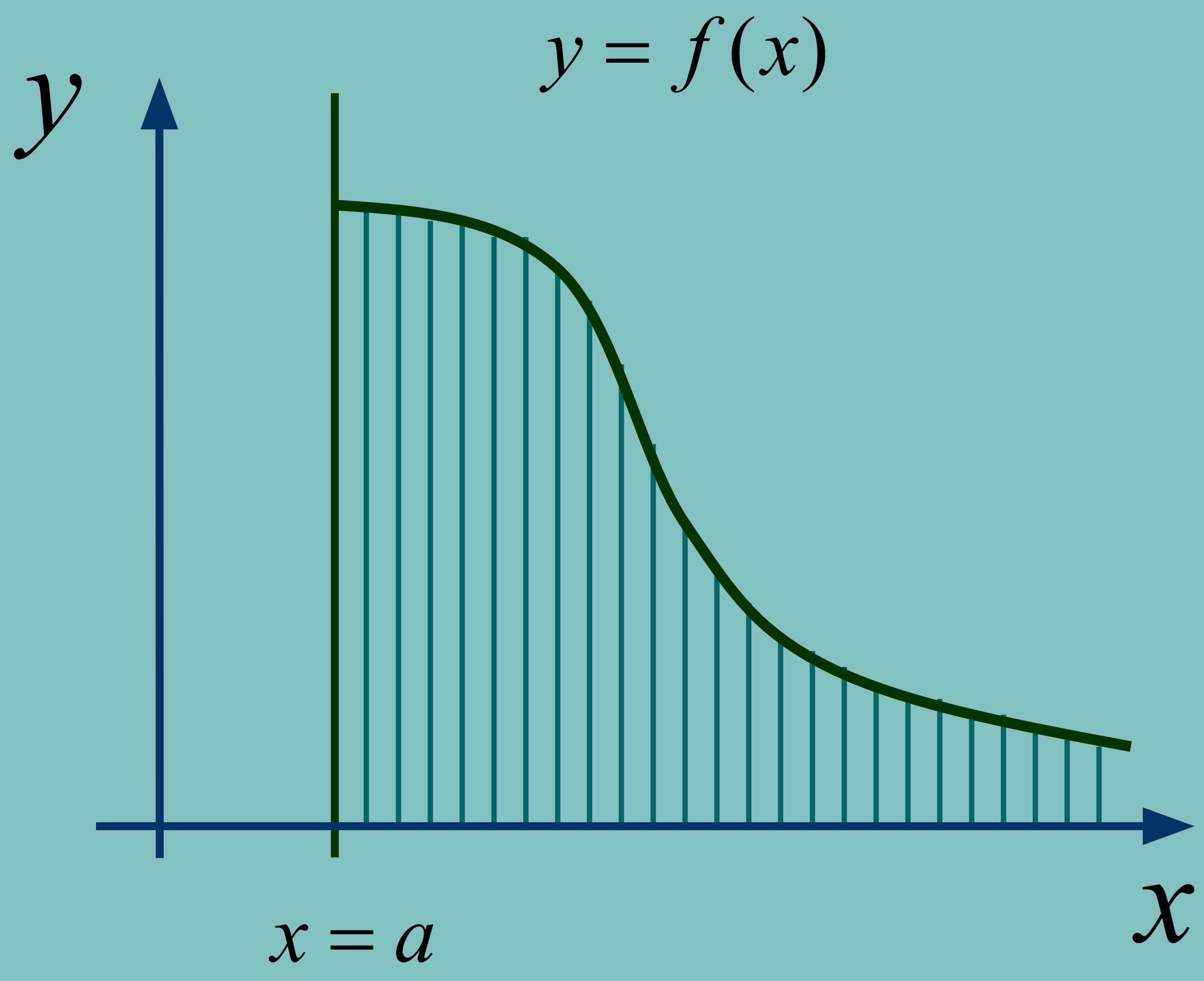
$$\boxed{\lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)dx = \int_a^{\infty} f(x)dx}$$

***Если такой предел существует и конечен, то несобственный интеграл называется сходящимся к данному пределу.***

***Если конечного предела не существует, то несобственный интеграл называется расходящимся.***

**Геометрический смысл несобственного интеграла основан на геометрической интерпретации определенного интеграла на отрезке [*a*,*t*].**

**Это площадь бесконечной области, ограниченной сверху неотрицательной функцией *f(x)*, снизу – осью *x*, слева – прямой *x*=*a*.**



$y = f(x)$
$y$
$x = a$
$x$

# Пример.

**Вычислить интеграл**

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$$

# Решение.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_1^{t} \frac{1}{x^2}\,dx =$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\Bigg|_1^t\right) = \lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right) = 1$$

**Аналогично можно определить несобственный интеграл на промежутке** $(-\infty, b]$

$$\boxed{\lim_{t \to -\infty} \int_{t}^{b} f(x)dx = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx}$$

**Рассмотрим несобственный интеграл на интервале** $(-\infty, +\infty)$

**Пусть для некоторого числа** $a$ **несобственные интегралы**

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx \quad и \quad \int_{a}^{+\infty} f(x)dx$$

**- сходятся. Тогда положим**

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

**и интеграл** $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ **тоже сходится.**

**Если хотя бы один из интегралов в левой части расходится, то будет расходится и интеграл**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

# Пример.

**Вычислить интеграл**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^x dx$$

# Решение.

**Исследуем на сходимость интегралы**

$$\int_{-\infty}^{0} e^x dx \quad и \quad \int_{0}^{+\infty} e^x dx$$

$$\int_{-\infty}^{0} e^x dx = \lim_{t \to -\infty} \int_{t}^{0} e^x dx = \lim_{t \to -\infty} \left( e^0 - e^t \right) = 1$$ **- сходится.**

$$\int_{0}^{+\infty} e^x dx = \lim_{t \to \infty} \int_{0}^{t} e^x dx = \lim_{t \to \infty} \left( e^t - 1 \right) = +\infty$$ **- расходится.**

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^x dx$$ **- расходится.**

**В рассмотренных примерах сначала с помощью первообразной вычислялся интеграл по конечному промежутку, а затем осуществлялся переход к пределу.**

**Если для функции y=f(x) существует первообразная F(x) на всем промежутке интегрирования**

$$[a,+\infty)$$

**то по формуле Ньютона-Лейбница**

$$\int_a^t f(x)dx = F(t) - F(a) = F(x)\Big|_a^t$$

Отсюда следует, что несобственный интеграл существует только в том случае, если существует конечный предел

$$\lim_{t \to \infty} F(t) = F(\infty)$$

И тогда можно записать:

$$\boxed{\int_a^{\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_a^{\infty} = F(\infty) - F(a)}$$

## Аналогично:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{b} = F(b) - F(-\infty)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} = F(\infty) - F(-\infty)$$

# Пример.

**Вычислить интеграл**

$$\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{x^2 - 1} dx$$

# Решение.

$$\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\Bigg|_2^{\infty} = 0 - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{3} = \ln\sqrt{3}$$

## 2. Несобственные интегралы от неограниченных функций (2 рода)

**Пусть функция *y=f(x)* непрерывна, но неограничена на полуинтервале [*a,b)*. Для определенности положим, что она ограничена и интегрируема на любом отрезке**

$$[a, b-\delta]$$

$$0 < \delta < b-a$$

**но неограничена в любой окрестности точки b или на промежутке** $[b-\delta, b]$

**Несобственным интегралом**

$$\int_a^b f(x)dx$$

**от функции y=f(x) на полуинтервале** $[a,b)$

**называется предел**

$$\boxed{\lim_{\delta\to 0}\int_a^{b-\delta} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx}$$

**где** $\delta > 0$

***Если такой предел существует и конечен, то несобственный интеграл называется сходящимся.***

***Если конечного предела не существует, то несобственный интеграл называется расходящимся.***

***Точка b называется особой точкой.***

**Аналогично можно ввести понятие несобственного интеграла от функции *y=f(x)* непрерывной но неограниченой на полуинтервале (*a,b*]:**

$$\boxed{\lim_{\delta\to 0}\int_{a+\delta}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx}$$

# Пример.

**Вычислить интеграл**

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

# Решение.

**Особая точка *x=0*.**

$$\int_{\delta}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2x^{\frac{1}{2}}\Bigg|_{\delta}^{1} = 2(1-\sqrt{\delta})$$

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{\delta \to 0} 2(1-\sqrt{\delta}) = 2$$

## ЗАМЕЧАНИЕ 1.

***Если функция y=f(x) неограничена при x=C, где***

$$C \in (a,b)$$

***то интеграл***

$$\int_a^b f(x)dx$$

***тоже называется несобственным:***

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx}$$

## ЗАМЕЧАНИЕ 2.

**Если a и b – особые точки, т.е. функция y=f(x) неограничена и интегрируема на интервале**

$$(a,b)$$

**то несобственный интеграл определяется как**

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx}$$

**Где С – произвольная точка на (a,b).**

# Пример.

**Вычислить интеграл**

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

# Решение.

**Особые точки:** ***x=-1, x=1*.**

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\lim_{\delta\to 0}\int_{-1+\delta}^{0}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx+\lim_{\delta\to 0}\int_{0}^{1-\delta}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=$$

$$=\lim_{\delta\to 0}\arcsin x\Big|_{-1+\delta}^{0}+\lim_{\delta\to 0}\arcsin x\Big|_{0}^{1+\delta}=$$

$$=-\lim_{\delta\to 0}\arcsin(-1+\delta)+\lim_{\delta\to 0}\arcsin(1-\delta)=$$

$$=-\arcsin(-1)+\arcsin(1)=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}$$

**Пусть функция y=f(x) интегрируема на всем промежутке [a,b], причем b – особая точка. Если существует первообразная F(x), имеющая предел в особой точке x=b или непрерывная на отрезке [a,b], то для вычисления несобственного интеграла имеет место формула Ньютона-Лейбница:**

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

# Пример.

**Вычислить интеграл**

$$\int_{-1}^{1} x^{-\frac{2}{3}} dx$$

# Решение.

**Особая точка *x=0*, однако первообразная функции**

$$3x^{\frac{1}{3}}$$

**непрерывна в этой точке, поэтому данный интеграл существует:**

$$\int_{-1}^{1} x^{-\frac{2}{3}}dx = 3x^{\frac{1}{3}}\Big|_{-1}^{1} = 3(1-(-1)) = 6$$