

12.9. ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Применение формулы Ньютона-Лейбница бывает сложным, так как бывает трудно найти первообразную функции.

Поэтому используются численные методы, позволяющие найти приближенное значение определенного интеграла с заданной точностью.

Основной принцип построения формул приближенного вычисления определенного интеграла состоит в замене частичных криволинейных трапеций, образующихся при разбиении отрезка интегрирования, на более простые фигуры.

1. Формула трапеций

Пусть на отрезке $[a,b]$ задана непрерывная неотрицательная функция $y=f(x)$.

Тогда интеграл

$$\int_a^b f(x)dx$$

равен площади под кривой $y=f(x)$ на отрезке $[a,b]$.

Мы получим приближенное значение этого интеграла, если вместо площади под кривой возьмем площадь под ломаной, подходящей достаточно близко к этой кривой.

Для этого разобьем $[a, b]$ на n равных частей длиной

$$h = \frac{b - a}{n}$$

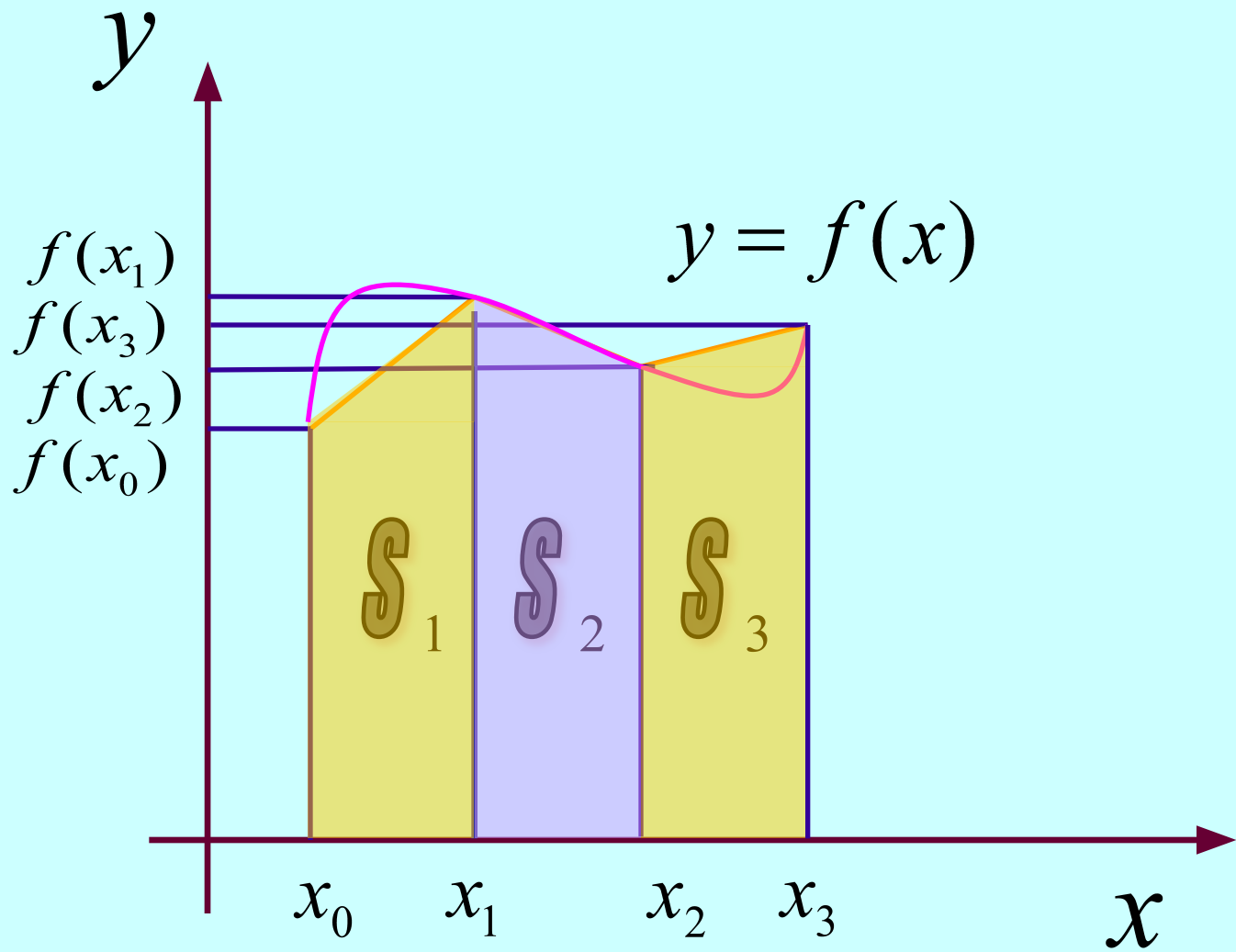
и на каждом из отрезков разбиения

$$[x_{i-1}, x_i]$$

где

$$i = 1, 2, \dots, n$$

заменяем участок кривой $y=f(x)$ хордой, стягивающей концевые точки.



$$\int_a^b f(x) dx \approx S_1 + S_2 + \dots + S_n$$

где каждое слагаемое представляет собой площадь трапеции:

$$S_1 = \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} \cdot h$$

$$S_2 = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \cdot h \quad \dots$$

$$S_n = \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2} \cdot h$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} \cdot h + \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \cdot h + \\ &\quad + \dots + \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2} \cdot h = \\ &= h \cdot \left(\frac{f(x_0)}{2} + \frac{f(x_1)}{2} + \frac{f(x_1)}{2} + \frac{f(x_2)}{2} + \dots + \frac{f(x_n)}{2} \right) \end{aligned}$$

Все слагаемые, кроме первого и последнего повторяются дважды.

Учитывая, что $h = \frac{b-a}{n}$ получаем

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \dots \right)$$

формула трапеций

Обозначим выражение в правой части как $S(n)$. Тогда абсолютная погрешность от применения формулы трапеций составит

$$\Delta = \left| \int_a^b f(x) dx - S(n) \right|$$

Пусть M_2 - максимальное значение модуля второй производной подынтегральной функции на $[a,b]$:

$$M_2 = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$$

Доказано, что

$$\Delta \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot M_2$$

Пример.

Вычислить

$$\int_1^{1.5} \frac{1}{x} dx$$

при $n=5$. Оценить погрешность.

Решение.

$n=5$, следовательно длина отрезков разбиения

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1.5-1}{5} = 0.1$$

$$x_0 = a = 1, \quad x_1 = 1.1, \quad x_2 = 1.2, \\ x_3 = 1.3, \quad x_4 = 1.4, \quad x_5 = b = 1.5$$

$$\int_1^{1.5} \frac{1}{x} dx \approx 0.1 \cdot \left(\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{1.5} \right) + \frac{1}{1.1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.3} + \frac{1}{1.4} \right) \approx 0.4059$$

Найдем погрешность:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad f''(x) = \frac{2}{x^3}$$

Эта функция монотонно убывает на данном отрезке, следовательно она достигает своего максимального значения в крайней левой точке при $x=1$.

$$M_2 = f''(1) = \frac{2}{1^3} = 2$$

$$\Delta \leq \frac{0.5^3}{12 \cdot 5^2} \cdot 2 = 0.84 \cdot 10^{-3}$$

2. Формула Симпсона

В основе формулы Симпсона лежит замена двух соседних частичных криволинейных трапеций, ограниченных сверху функцией $y=f(x)$ на криволинейную трапецию, ограниченную сверху параболой вида

$$y = Ax^2 + Bx + C$$

Поэтому формулу Симпсона часто называют формулой парабол.

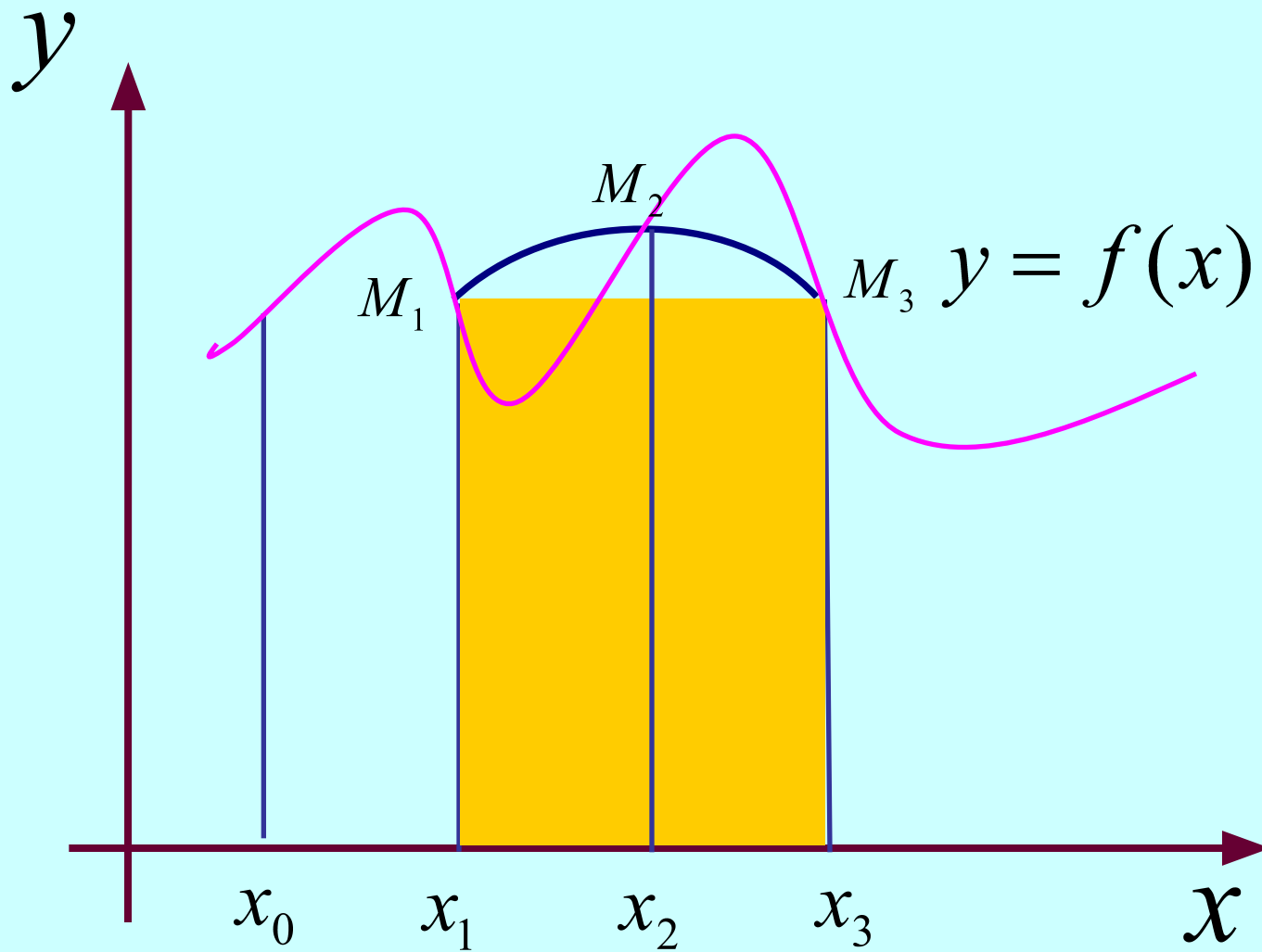
Разобьем $[a,b]$ на $2n$ равных частей. Тогда кривая разобьется прямыми

$$x = x_i$$

на $2n$ частей точками M_0, M_1, \dots, M_{2n} .

Через каждую тройку точек M_0, M_1, M_2, \dots проведем параболу. Коэффициенты A, B, C находятся из условия ее прохождения через тройку точек.

Таким образом, криволинейная трапеция, ограниченная сверху функцией $y=f(x)$, заменяется составной фигурой, ограниченной сверху n парабололами.



$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2}))$$

формула Симпсона

Пусть M_4 - максимальное значение модуля четвертой производной подынтегральной функции на $[a,b]$:

$$M_4 = \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|$$

Тогда погрешность вычислений по формуле Симпсона оценивается как:

$$\Delta \leq \frac{(b-a)^5}{2880n^4} \cdot M_4$$

Пример.

Вычислить

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

при $n=2$.

Решение.

$n=2$, следовательно полное число узлов равно 5.

i	0	1	2	3	4
x_i	0	0.25	0.5	0.75	1
y_i	1	0.941176	0.8	0.64	0.5

Тогда

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \approx$$

$$\approx \frac{1}{12} \cdot (1 + 0.5 + 2 \cdot 0.8 + 4 \cdot (0.941176 + 0.64)) \approx 0.785392$$