13.4. РЯДЫ С ЧЛЕНАМИ ПРОИЗВОЛЬНОГО ЗНАКА

1. Знакочередующиеся ряды

Знакочередующимся называется ряд, в котором члены попеременно то положительны, то отрицательны:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n-1} u_n + \ldots$$

$$u_n > 0$$

ТЕОРЕМА. (ПРИЗНАК ЛЕЙБНИЦА)

Если члены знакочередующегося ряда убывают по абсолютной величине

$$u_1 > u_2 > u_3 > \ldots > u_n > \ldots$$

и предел его общего члена при $n \to \infty$

равен нулю: $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$

то ряд сходится, а его сумма не превышает его первого члена.

Доказательство:

Рассмотрим последовательность частичных сумм четного числа членов при *n=2m*:

$$S_{2m} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \ldots + (u_{2m-1} - u_{2m})$$

Эта последовательность возрастает, т.к. с ростом *n* увеличивается число положительных слагаемых в скобках.

Эта последовательность также ограничена, поскольку

$$S_{2m} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \ldots - (u_{2m-2} - u_{2m-1}) - u_{2m}$$

$$\Downarrow$$

$$S_{2m} < u_1 \quad (1)$$

Поэтому последовательность S_{2m} имеет предел:

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m} = S$$

В неравенстве (1) переходим к пределу:

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m} < \lim_{m\to\infty} u_1 \quad \Rightarrow \quad S < u_1$$

Теперь рассмотрим последовательность частичных сумм нечетного числа членов при *n=2m+1*:

$$S_{2m+1} = S_{2m} + u_{2m+1}$$

Переходим к пределу:

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} S_{2m} + \underbrace{\lim_{m\to\infty} u_{2m+1}}_{0} = S$$

Так как при любом *n* (четном и нечетном)

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

то ряд сходится.

ПРИМЕР.

Исследовать сходимость ряда

$$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\dots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}+\dots$$

Решение:

Проверим выполнение признака Лейбница:

1 **Члены ряда убывают по абсолютной величине:**

$$1 > \frac{1}{2^2} > \frac{1}{3^2} > \dots$$

2

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

Ряд сходится.

СЛЕДСТВИЕ:

Погрешность при приближенном вычислении суммы сходящегося знакочередующегося ряда, удовлетворяющего условиям теоремы Лейбница, по абсолютной величине не превышает абсолютной величины первого отброшенного члена.

Доказательство:

По формуле:

$$S = S_n + r_n$$

Где S_n – сумма первых n членов ряда;

r_n – n-ый остаток ряда

Полагаем приближенно: $S \approx S_n$

При этом мы допускаем погрешность, равную r_n.

При четном n n-ый остаток знакочередующегося ряда имеет вид:

$$u_{n+1} - u_{n+2} + \ldots$$

Этот ряд удовлетворяет всем условиям теоремы Лейбница и его сумма не превосходит первого члена:

$$r_n \le u_{n+1}$$

При нечетном *n* *n*-ый остаток знакочередующегося ряда имеет вид:

$$-u_{n+1} + u_{n+2} - \dots$$

Его сумма отрицательна: $r_n < 0$

Следовательно, для любого *n*

$$|r_n| \le u_{n+1}$$

2. Знакопеременные ряды

Знакопеременным называется ряд, в котором каждый член может быть как положительным, так и отрицательным:

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

ТЕОРЕМА. (достаточный признак сходимости)

Если ряд, составленный из абсолютных величин членов знакопеременного ряда

$$|u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots$$

сходится, то сходится и данный ряд.

Доказательство:

Пусть S_n^+ - сумма абсолютных величин членов ряда со знаком «+»;

Пусть S_n^- - сумма абсолютных величин членов ряда со знаком «-».

Тогда частичная сумма знакопеременного ряда

$$S_{n1} = S_n^+ - S_n^-$$

Частичная сумма ряда, состоящего из модулей:

$$S_{n2} = S_n^+ + S_n^-$$

Ряд, состоящий из модулей, по условию сходится, следовательно существует конечный предел:

$$\lim_{n\to\infty} S_{n2} = S$$

Последовательности S_{n1} u S_{n2}

возрастают и ограничены, поскольку

$$S_n^+ \le S, \quad S_n^- \le S$$

Следовательно существуют пределы

$$\lim_{n\to\infty} S_n^+, \quad \lim_{n\to\infty} S_n^-$$

и

$$\lim_{n\to\infty} S_{n1} = \lim_{n\to\infty} S_n^+ - \lim_{n\to\infty} S_n^-$$

Ряд сходится.

Ряд называется абсолютно сходящимся, если сходится как сам ряд, так и ряд, составленный из абсолютных величин его членов.

Ряд называется условно сходящимся, если сам ряд сходится, а ряд, составленный из абсолютных величин его членов – расходится.

Свойства абсолютно и условно сходящихся рядов различны.

Абсолютно сходящиеся ряды можно складывать, перемножать, переставлять местами члены ряда.

ПРИМЕРЫ.

1

Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$$

Решение:

Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных значений членов данного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Это гармонический ряд, который расходится, следовательно абсолютной сходимости нет.

Исследуем ряд на условную сходимость по признаку Лейбница:

1

Члены ряда убывают по абсолютной величине:

$$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \ldots$$

2

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Ряд условно сходится.

2

Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n^{\alpha}}$$

$$\alpha > 0$$

Решение:

Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных значений членов данного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

Это обобщенный гармонический ряд, который сходится при $\alpha>1$, следовательно исходный ряд будет сходится абсолютно.

При $\alpha<1$ ряд расходится, следовательно исследуем ряд на условную сходимость по признаку Лейбница:

1

Члены ряда убывают по абсолютной величине:

$$1 > \frac{1}{2^{\alpha}} > \frac{1}{3^{\alpha}} > \ldots$$

2

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = 0$$

При α<1 ряд условно сходится.