14. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

14.1. ОБЛАСТЬ СХОДИМОСТИ СТЕПЕННОГО РЯДА

Рассмотрим ряды, членами которых являются не числа, а функции, определенные на некотором множестве.

Такие ряды называются функциональными.

Будем рассматривать степенные ряды, членами которых являются степенные функции.

Степенным называется ряд

$$C_0 + C_1 \cdot x + C_2 \cdot x^2 + \ldots + C_n \cdot x^n + \ldots$$

1

Числа $C_0 \ldots C_n$ называются коэффициентами степенного ряда.

При разных значениях x будут получаться разные числовые ряды, которые могут быть сходящимися или расходящимися.

Совокупность значений x, при которых степенной ряд (1) сходится, называется областью сходимости степенного ряда.

Частичная сумма степенного ряда

$$S_n = C_0 + C_1 \cdot x + C_2 \cdot x^2 + \ldots + C_n \cdot x^n$$

будет функцией от переменной x .

Следовательно, последовательность частичных сумм является функциональной последовательностью и сумма ряда будет зависеть от x. Она будет определена в области сходимости ряда.

ПРИМЕР.

Найти область сходимости степенного ряда

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$

РЕШЕНИЕ.

Данный ряд можно рассматривать как геометрический при

$$q = x$$

который сходится при

$$|q| = |x| < 1 \Longrightarrow -1 < x < 1$$

Т.е. областью сходимости будет интервал

$$(-1, 1)$$

ТЕОРЕМА АБЕЛЯ

1

Если степенной ряд сходится при

$$x = x_0 \neq 0$$

то он сходится, и при том абсолютно, при всех значениях х, таких что

$$|x| < |x_0|$$

2

Если степенной ряд расходится при

$$x = x_1$$

то он расходится при всех значениях х, таких что

$$|x| > |x_1|$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

1

По условию ряд (1) сходится при $x = x_0 \neq 0$

Следовательно выполняется необходимый признак сходимости:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} C_n \cdot x_0^n = 0$$

Поэтому последовательность $\left| C_n \cdot x_0^n \right|$

ограничена, т.е. существует такое число *M>0*, что для всех *n* выполняется неравенство:

$$\left|C_n \cdot x_0^n\right| < M \qquad (2)$$

Рассмотрим ряд, состоящий из абсолютных величин ряда (1):

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|C_n \cdot x_0^n\right|$$

Запишем его в виде:

$$\left|C_0\right| + \left|C_1 \cdot x_0\right| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right| + \left|C_2 \cdot x_0^2\right| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \ldots + \left|C_n \cdot x_0^n\right| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \ldots$$

Согласно неравенству (2), члены этого ряда меньше членов ряда

$$M + M\cdot\left|\frac{x}{x_0}\right| + M\cdot\left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \ldots + M\cdot\left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \ldots$$

который можно рассматривать как сходящийся геометрический ряд при

$$q = \left|\frac{x}{x_0}\right| < 1 \quad \Rightarrow \quad |x| < |x_0|$$

Следовательно по признаку сравнения заданный ряд тоже сходится.

2

По условию ряд (1) расходится при $x = x_1$

Покажем, что он будет расходится для всех *x*, таких что $|x| > |x_1|$

Предположим от противного, что при $|x| > |x_1|$

ряд сходится. Тогда, по доказанному выше, он должен сходится и при $x = x_1$

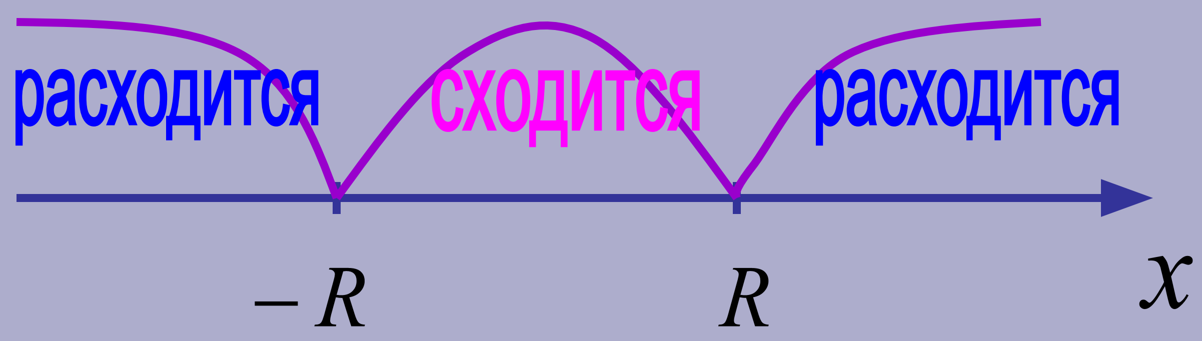
Что противоречит условию, следовательно ряд будет расходится при $|x| > |x_1|$

Из теоремы Абеля следует, что существует такое число

$$R \geq 0$$

что при $|x| < R$ **ряд сходится;**

при $|x| > R$ **ряд расходится.**



ТЕОРЕМА.

Если степенной ряд сходится не только при $x=0$, то существует такое положительное число R (возможно и бесконечное), что ряд абсолютно сходится в интервале $(-R,R)$ и расходится везде вне этого интервала.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

Пусть X – множество точек x, в которых ряд (1) сходится. По условию теоремы это множество не пустое. Покажем, что оно ограничено.

Пусть x_1 – точка, где ряд расходится.

Тогда по теореме Абеля для любого х выполняется условие:

$$|x| < |x_1|$$

Значит у этого множества существует верхняя грань $R > 0$, поскольку ряд сходится не только при $x=0$.

Если не существует такой точки x_1, где ряд расходится, то

$$R = \infty$$

и тогда множество X не ограничено.

Пусть x – любе число, удовлетворяющее условию

$$|x| < R$$

или

$$-R < x < R$$

Тогда по теореме Абеля при этих значениях x имеет место абсолютная сходимость ряда (1).

Пусть теперь *x* – любе число, удовлетворяющее условию

$$|x| > R$$

если $$R < \infty$$

Такие значения x находятся вне промежутка сходимости X и в этих точках ряд (1) расходится.

Число R называется радиусом сходимости, а интервал (-R,R) – интервалом сходимости степенного ряда.

На концах интервала сходимости при $x = \pm R$ **ряд может как сходиться, так и расходиться.**

Найдем выражение для радиуса сходимости степенного ряда через его коэффициенты.

Рассмотрим ряд, состоящий из абсолютных величин членов ряда (1):

$$|C_0| + |C_1 \cdot x| + |C_2 \cdot x^2| + \ldots + |C_n \cdot x^n| + \ldots$$

Коэффициенты этого ряда, по крайней мере, начиная с некоторого номера, отличны от нуля.

По признаку Даламбера ряд будет сходится, если

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}\cdot x^{n+1}}{C_n\cdot x^n}\right|=|x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right|<1$$

$$|x|<\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right|$$

Если этот предел существует, то он и является радиусом сходимости ряда.

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right|$$

Радиус сходимости степенного ряда

ПРИМЕР.

Найти область сходимости степенного ряда

$$1+\frac{2x}{3^2\cdot\sqrt{3}}+\frac{4x^2}{5^2\cdot\sqrt{3^2}}+\ldots+\frac{2^n\cdot x^2}{(2n+1)^2\cdot\sqrt{3^n}}+\ldots$$

РЕШЕНИЕ.

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^n}{(2n+1)^2\sqrt{3^n}}\cdot\frac{(2n+3)^2\sqrt{3^{n+1}}}{2^{n+1}}\right|=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2n+3)^2}{(2n+1)^2}\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Интервал сходимости ряда

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Выясним поведение ряда на концах интервала.

При

$$x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ряд принимает вид:

$$1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)^2} + \ldots$$

Это знакочередующийся ряд. Проверяем выполнение признака Лейбница:

1

Члены ряда убывают по абсолютной величине:

$$1 > \frac{1}{3^2} > \frac{1}{5^2} > \ldots > \frac{1}{(2n+1)^2} > \ldots$$

2

Предел общего члена равен нулю:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} = 0$$

Ряд сходится.

При $x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

ряд принимает вид:

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \ldots + \frac{1}{(2n+1)^2} + \ldots$$

Это обобщенный гармонический ряд при $\alpha = 2$

у которого все члены с четными номерами равны нулю. Данный ряд является сходящимся.

Область сходимости ряда $\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{2}; \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$