15. ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

15. 1. ОСНОВЫ ГАРМОНИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Функция f(x) называется периодической на промежутке X, если существует такое наименьшее число T, называемое периодом функции, что для любого x выполняется равенство

$$f(x+T)=f(x)$$

Если Т – период функции, то при $x + nT \in X$

где n – целое число, выполняется равенство:

$$f(x + nT) = f(x)$$

Поэтому число nT **тоже часто называют периодом функции в широком понимании этого слова.**

Простейшими периодическими функциями являются *sin x* и *cos x* с периодом *2П*.

Из простых периодических функций можно составить более сложные.

Например, рассмотрим функции

$$f_0(x) = A$$

$$f_1(x) = A_1 \sin\left(\frac{2\pi}{T}x + \alpha_1\right)$$

$$f_2(x) = A_2 \sin\left(\frac{4\pi}{T}x + \alpha_2\right)$$

$$f_3(x) = A_3 \sin\left(\frac{6\pi}{T}x + \alpha_3\right)$$

$$\cdots$$

1

Где A_n и α_n – постоянные величины, которые называются амплитудой и сдвигом фаз, соответственно.

Периоды для этих функций равны:

$$f_0(x): \quad \text{любое число}$$

$$f_1(x): \quad T$$

$$f_2(x): \quad \frac{T}{2}$$

$$f_3(x): \quad \frac{T}{3}$$

Проверим это для одной из функций:

$$f_2(x) = A_2 \sin\left(\frac{4\pi}{T}\left(x + \frac{T}{2}\right) + \alpha_2\right) = A_2 \sin\left(\frac{4\pi}{T} \cdot x + 2\pi + \alpha_2\right) =$$

$$= A_2 \sin\left(\frac{4\pi}{T} \cdot x + \alpha_2\right)$$

Если сложить эти функции, то снова получится периодическая функция, но более сложного вида. Геометрически это означает, что график сложной периодической функции есть результат наложения простых синусоид.

Поставим обратную задачу: можно ли данную периодическую функцию *f(x)* с периодом *T* представить в виде конечной или бесконечной суммы периодических функций?

Такая задача решается для широкого класса функций и называется гармоническим анализом.

При этом отдельные функции вида (1) называются гармоническими составляющими или гармониками функции *f(x)*.

Ряд вида

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x +$$

$$+ a_3 \cos 3x + b_3 \sin 3x + \ldots =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx \right)$$

называется тригонометрическим рядом.

Числа a_n и b_n –называются коэффициентами этого ряда.

В этот ряд входят функции

$$\frac{1}{2}, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx$$

2

имеющие общий период 2П.

Следовательно, любая частичная сумма тригонометрического ряда тоже будет периодической функцией с периодом *2П*.

Поэтому, если ряд сходится на отрезке [-*П*,*П*], то он сходится и на всей числовой прямой.