


15. ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ



15. 1. ОСНОВЫ ГАРМОНИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Функция $f(x)$ называется периодической на промежутке X , если существует такое наименьшее число T , называемое периодом функции, что для любого x выполняется равенство

$$f(x+T)=f(x)$$



Если T – период функции, то при $x + nT \in X$

где n – целое число, выполняется равенство:

$$f(x + nT) = f(x)$$

Поэтому число nT тоже часто называют периодом функции в широком понимании этого слова.

Простейшими периодическими функциями являются $\sin x$ и $\cos x$ с периодом 2π .

Из простых периодических функций можно составить более сложные.

Например, рассмотрим функции



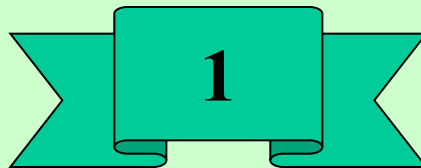
$$f_0(x) = A$$

$$f_1(x) = A_1 \sin\left(\frac{2\pi}{T}x + \alpha_1\right)$$

$$f_2(x) = A_2 \sin\left(\frac{4\pi}{T}x + \alpha_2\right)$$

$$f_3(x) = A_3 \sin\left(\frac{6\pi}{T}x + \alpha_3\right)$$

...



Где A_n и α_n – постоянные величины, которые называются амплитудой и сдвигом фаз, соответственно.

Периоды для этих функций равны:

$$f_0(x) : \text{любое число}$$

$$f_1(x) : T$$


$$f_2(x) : \frac{T}{2}$$

$$f_3(x) : \frac{T}{3}$$

Проверим это для одной из функций:

$$\begin{aligned} f_2(x) &= A_2 \sin\left(\frac{4\pi}{T}\left(x + \frac{T}{2}\right) + \alpha_2\right) = A_2 \sin\left(\frac{4\pi}{T} \cdot x + 2\pi + \alpha_2\right) = \\ &= A_2 \sin\left(\frac{4\pi}{T} \cdot x + \alpha_2\right) \end{aligned}$$


Если сложить эти функции, то снова получится периодическая функция, но более сложного вида. Геометрически это означает, что график сложной периодической функции есть результат наложения простых синусоид.



Поставим обратную задачу: можно ли данную периодическую функцию $f(x)$ с периодом T представить в виде конечной или бесконечной суммы периодических функций?

Такая задача решается для широкого класса функций и называется гармоническим анализом.

При этом отдельные функции вида (1) называются гармоническими составляющими или гармониками функции $f(x)$.



Ряд вида

$$\begin{aligned} & \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \\ & \quad + a_3 \cos 3x + b_3 \sin 3x + \dots = \\ & = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \end{aligned}$$

называется тригонометрическим рядом.

Числа a_n и b_n —называются коэффициентами этого ряда.


В этот ряд входят функции

$$\frac{1}{2}, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx$$



2

имеющие общий период 2π .



**Следовательно, любая частичная сумма
тригонометрического ряда тоже будет
периодической функцией с периодом 2π .**

**Поэтому, если ряд сходится на отрезке $[-\pi, \pi]$, то он
сходится и на всей числовой прямой.**

