15.2. ОРТОГОНАЛЬНОСТЬ СИСТЕМЫ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Важным свойством системы тригонометрических функций (2) является их ортогональность на отрезке $[-\pi,\pi]$.

Ортогональность понимается следующим образом:

Интеграл по этому отрезку от произведения любых двух функций этой системы

-равен нулю, если в подынтегральную функцию входят различные функции системы (2);

-равен положительному числу, если подынтегральная функция состоит из квадрата любой функции системы (2).

Проверим это свойство для всех функций системы.

1

$$k \neq n,$$

$$k, n = 0,1,2...$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cdot \cos nx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\cos(k+n)x + \cos(k-n)x\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(k+n)x dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(k-n)x dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+n}\sin(k+n)x + \frac{1}{k-n}\sin(k-n)x\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+n}\sin(k+n)\pi + \frac{1}{k-n}\sin(k-n)\pi + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{k+n}\sin(k+n)\pi + \frac{1}{k-n}\sin(k-n)\pi\right) = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cdot \sin nx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\cos(k-n)x - \cos(k+n)x\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(k-n)x dx - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(k+n)x dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-n}\sin(k-n)x - \frac{1}{k+n}\sin(k+n)x\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-n}\sin(k-n)\pi - \frac{1}{k+n}\sin(k+n)\pi - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{k-n}\sin(k-n)\pi - \frac{1}{k+n}\sin(k+n)\pi\right) = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cdot \cos nx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sin(k+n)x + \sin(k-n)x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(k+n)xdx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(k-n)xdx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+n}\cos(k+n)x + \frac{1}{k-n}\cos(k-n)x\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{1}{k+n}\cos(k+n)\pi} + \cancel{\frac{1}{k-n}\cos(k-n)\pi} - \right.$$

$$\left. - \cancel{\frac{1}{k+n}\cos(k+n)\pi} - \cancel{\frac{1}{k-n}\cos(k-n)\pi}\right) = 0$$

2

$$k = n,$$

$$k, n = 0, 1, 2\ldots$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2nx)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos 2nx\,dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2n}\sin 2nx \right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\pi + \pi + \frac{1}{2n}\sin 2n\pi + \frac{1}{2n}\sin 2n\pi \right) = \pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2nx)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos 2nx\,dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2n}\sin 2nx \right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\pi + \pi - \frac{1}{2n}\sin 2n\pi - \frac{1}{2n}\sin 2n\pi \right) = \pi$$