15.4. РЯДЫ ФУРЬЕ ДЛЯ ЧЕТНЫХ И НЕЧЕТНЫХ ФУНКЦИЙ

Разложение в ряд Фурье возможно для функций, удовлетворяющих условию теоремы, сформулированной в предыдущем параграфе.

Для четных и нечетный функций разложение в ряд Фурье существенно упрощается.

Пусть функция f(x) определена и является нечетной на отрезке [-П,П]:

$$f(-x) = -f(x)$$

Найдем коэффициенты разложения:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos nx dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\cdot\cos nx dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cdot\cos nx dx =$$

В первом интеграле делаем замену:

$$\left|\begin{array}{ccc} x=-t & dx=-dt & f(x)=-f(t) \\ x_1=0 \quad t_1=0 & & x_2=-\pi \quad t_2=\pi \end{array}\right|$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0} f(t)\cdot\cos ntdt+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cdot\cos nxdx=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cdot\cos nxdx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cdot\cos nxdx=0$$

$$\boxed{a_n=0}$$

Тогда

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot \sin nx dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\cdot \sin nx dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cdot \sin nx dx =$$

$$\left| \begin{array}{lll} x = -t & dx = -dt & f(x) = -f(t) \\ x_1 = 0 \quad t_1 = 0 & & x_2 = -\pi \quad t_2 = \pi \end{array} \right|$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0} f(t)\cdot \sin nt dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cdot \sin nx dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cdot \sin nx dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cdot \sin nx dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cdot \sin nx dx$$

$$\boxed{b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cdot \sin nx dx}$$

Таким образом, нечетная на отрезке [-П,П] функция f(x) будет разлагаться в ряд Фурье следующим образом:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin nx$$

Пусть функция f(x) определена и является четной на отрезке [-П,П]:

$$f(-x) = f(x)$$

Найдем коэффициенты разложения:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot \sin nx dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\cdot \sin nx dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cdot \sin nx dx =$$

В первом интеграле делаем замену:

$$\left| \begin{array}{ccc} x = -t & dx = -dt & f(x) = -f(t) \\ x_1 = 0 \quad t_1 = 0 & & x_2 = -\pi \quad t_2 = \pi \end{array} \right|$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0} f(t)\cdot\sin ntdt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cdot\sin nxdx =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cdot\sin nxdx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cdot\sin nxdx = 0$$

$$\boxed{b_n = 0}$$

Тогда

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos nx dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\cdot\cos nx dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cdot\cos nx dx =$$

$$\left|\begin{array}{ccc} x = -t & dx = -dt & f(x) = -f(t) \\ x_1 = 0 \quad t_1 = 0 & & x_2 = -\pi \quad t_2 = \pi \end{array}\right|$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0} f(t)\cdot\cos nt\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cdot\cos nx\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cdot\cos nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cdot\cos nx\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cdot\cos nx\,dx$$

$$\boxed{a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cdot\cos nx\,dx}$$

Таким образом, четная на отрезке [-П,П] функция f(x) будет разлагаться в ряд Фурье следующим образом:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cdot\cos nx$$

ПРИМЕРЫ.

1

Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x) = x$$

РЕШЕНИЕ.

Данная функция удовлетворяет всем условиям теоремы о разложении функции в ряд Фурье.

Она является нечетной на отрезке [-П,П], поэтому

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cdot \sin nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cdot \sin nx dx =$$

Интеграл берем по частям:

$$\left| \begin{array}{ll} u = x & dv = \sin nx dx \\ du = dx & v = -\dfrac{1}{n}\cos nx \end{array} \right|$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{n} \cdot x \cdot \cos nx \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi} \cos nx dx \right) =$$

$$= \frac{2}{\pi \cdot n}\left((-1)^{n+1} \cdot \pi - \frac{1}{n}\sin nx \Big|_0^{\pi} \right) = (-1)^{n+1} \cdot \frac{2}{n}$$

$$0$$

Тогда ряд Фурье для данной функции будет иметь вид:

$$x=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\cdot\sin nx = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{\sin nx}{n}$$

$$n=1,2,3\ldots$$

2

Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x) = x^2$$

РЕШЕНИЕ.

Данная функция удовлетворяет всем условиям теоремы о разложении функции в ряд Фурье.

Она является четной на отрезке [-П,П], поэтому

$$b_n = 0$$

При n=0:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}$$

При n=1, 2, 3…:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cdot\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cdot\cos nx dx =$$

Интеграл берем по частям:

$$\left| \begin{array}{ll} u = x^2 & dv = \cos nx dx \\ du = 2x dx & v = \dfrac{1}{n}\sin nx \end{array} \right|$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n}\cdot x^2\cdot\sin nx\Big|_0^{\pi}-\frac{2}{n}\int_0^{\pi}x\cdot\sin nx\,dx\right)=$$

Оставшийся интеграл снова берем по частям:

$$\left|\begin{array}{ll} u=x & dv=\sin nx\,dx \\ du=dx & v=-\dfrac{1}{n}\cos nx \end{array}\right|$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\underbrace{\frac{1}{n}\cdot x^2\cdot\sin nx\Big|_0^{\pi}}_{0}-\frac{2}{n}\left(-\frac{1}{n}x\cos nx\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx\right)\right)=$$

$$=\frac{4}{\pi n^2}\left(x\cos nx\Big|_0^{\pi}+\underbrace{\frac{1}{n^2}\sin nx\Bigg|_0^{\pi}}_{0}\right)=(-1)^n\frac{4}{n^2}$$

Тогда ряд Фурье для данной функции будет иметь вид:

$$x^2=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cdot\cos nx=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{\sin nx}{n^2}$$