16.2. ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Число А называется пределом функции z=f(x,y) при $x \to x_0$ $и$ $y \to y_0$

если для любого,даже сколь угодно малого числа ε>0, найдется такое положительное число δ, что для всех точек (x,y), отстоящих от точки (x_0, y_0) на расстояние ρ>δ, выполняется неравенство:

$$\left| f(x,y) - A \right| < \varepsilon$$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = A$$

ПРИМЕР.

Вычислить предел функции, когда оба аргумента стремятся к нулю.

$$f(x,y)=\frac{\ln(1-x^2-y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

РЕШЕНИЕ.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\ln(1-x^2-y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\left|\begin{array}{ll} npu & \sqrt{x^2+y^2} \\ & x\to 0\ y\to 0 \\ & \rho\to 0\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{\rho\to 0}\frac{\ln(1-\rho^2)}{\rho}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{\rho\to 0}\left(-\frac{1}{1-\rho^2}\cdot 2\rho\right)=0$$

Вычисление пределов функции одной переменной является менее сложной задачей, чем вычисление пределов функции двух переменных.

Это происходит потому, что на прямой всего два направления, по которым аргумент может стремиться к предельной точке (справа и слева), а на плоскости таких направлений бесконечно много и пределы функций по разным направлениям могут не совпадать.

Функция z=f(x,y) называется непрерывной в точке (x_0,y_0), если она

1 **Определена в точке (x_0,y_0)**

2 **Имеет конечный предел при** $x \to x_0$ и $y \to y_0$

3 **Этот предел равен значению функции в точке (x_0,y_0)**

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$