17.3. СВЕДЕНИЕ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА К ПОВТОРНОМУ

Рассмотрим способ вычисления двойных интегралов путем сведения их к повторному интегралу.

Сформулируем теорему.

ТЕОРЕМА.

Пусть функция $z=f(x,y)$ определена и интегрируема в области D, ограниченную снизу и сверху двумя непрерывными кривыми $y=y_1(x)$ и $y=y_2(x)$, причем

$$y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$$

$$a \leq x \leq b$$

Пусть для любого x из отрезка [a,b] существует определенный интеграл

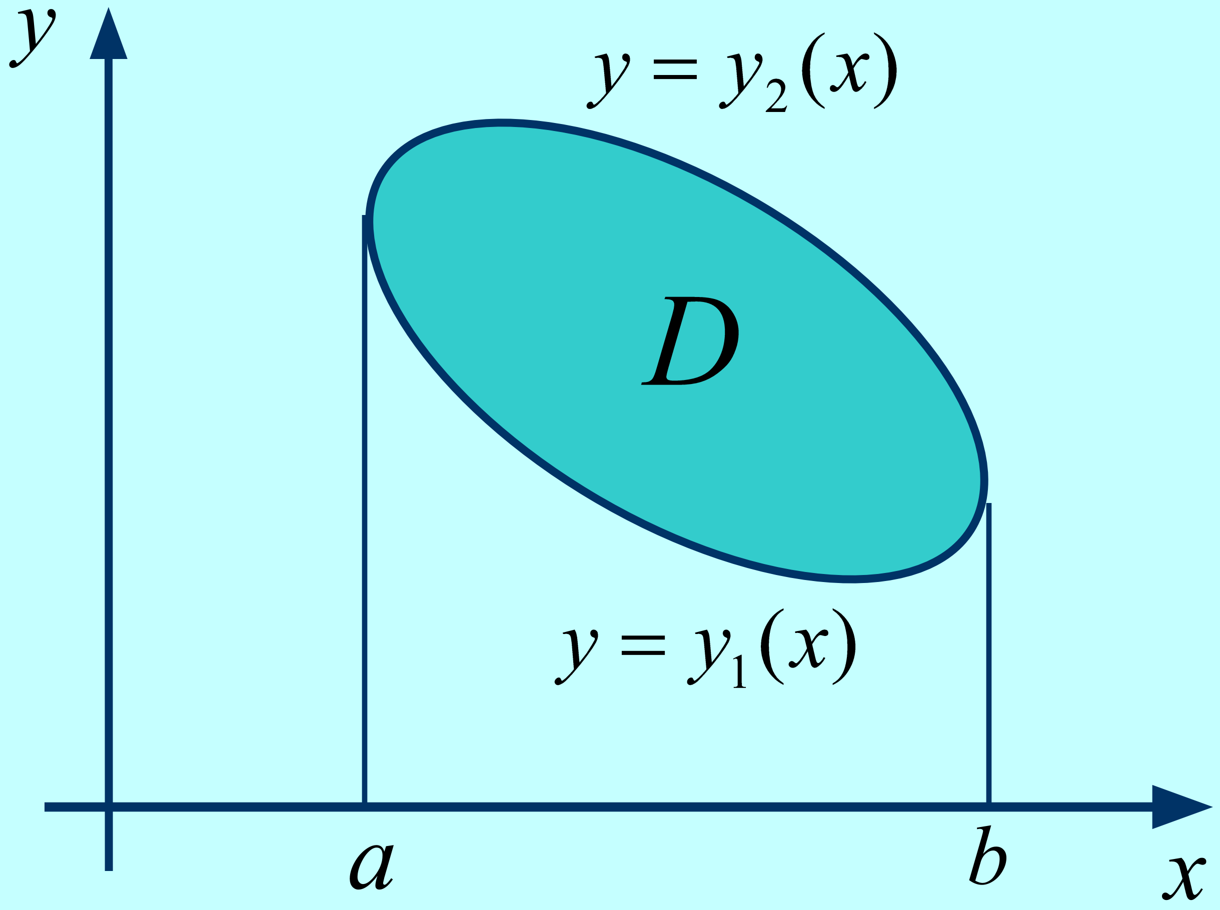
$$I(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy$$

Тогда существует повторный интеграл

$$\int_a^b I(x)\,dx = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy$$

и выполняется равенство:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy$$



y
$y = y_2(x)$
D
$y = y_1(x)$
a
b
x

Если D –прямоугольная область, т.е.

$$y_1(x) = c$$

$$y_2(x) = d$$

тогда

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x, y)\,dy$$

ПРИМЕРЫ.

1

Вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_D \left(3x^2 \cdot y - 2x^3\right) dxdy$$

$$D = \left\{0 \le x \le 1, \quad 1 \le y \le 2\right\}$$

РЕШЕНИЕ.

$$\iint_D \left(3x^2 \cdot y - 2x^3\right) dxdy = \int_0^1 dx \int_1^2 (3x^2 \cdot y - 2x^3) dy =$$

$$= \int_0^1 dx \left[\frac{3}{2} x^2 y^2 - 2x^3 y\right]\Bigg|_1^2 = \int_0^1 \left(\frac{9}{2} x^2 - 2x^3\right) dx =$$

$$= \left(\frac{3}{2} x^3 - \frac{1}{2} x^4\right)\Bigg|_0^1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$$

2

Вычислить двойной интеграл

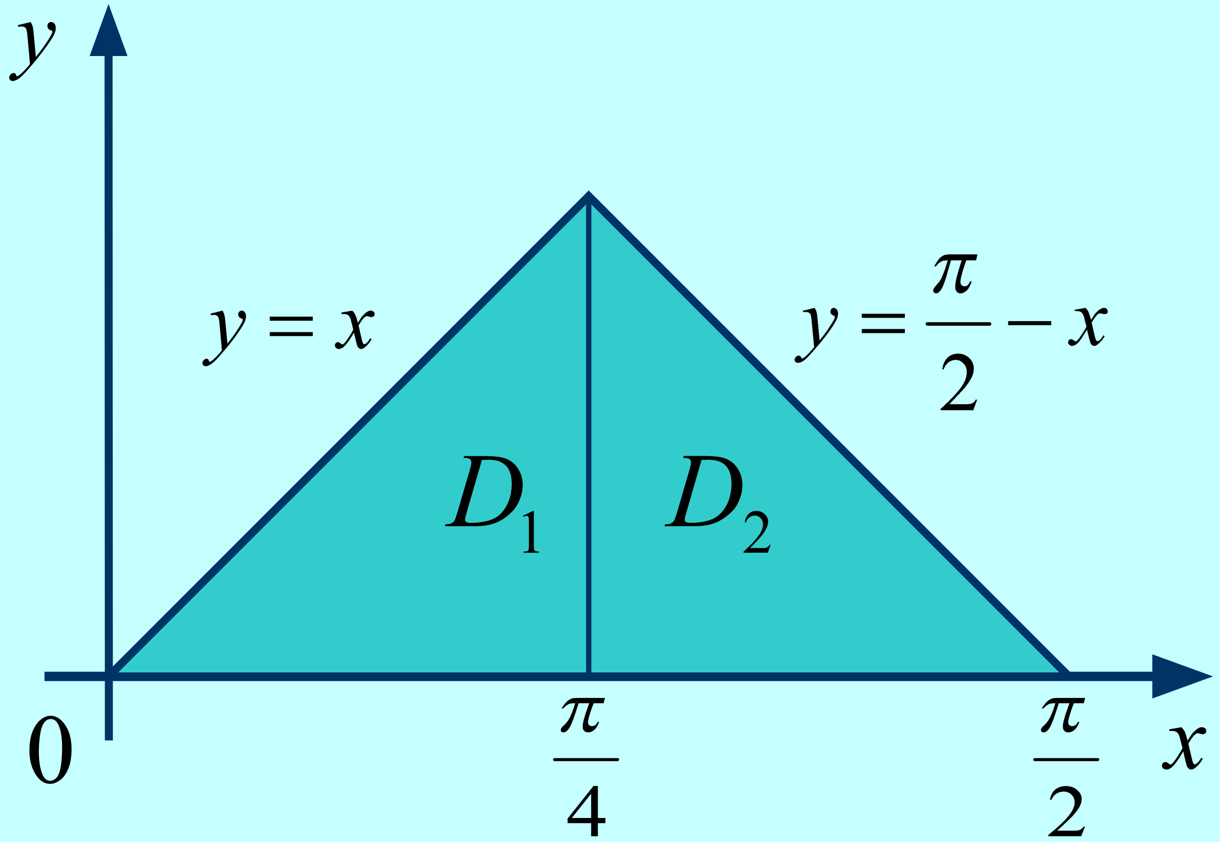
$$\iint_D \sin(x+y)\,dxdy$$

где область D ограничена линиями

$$x = y, \quad x + y = \frac{\pi}{2}, \quad y = 0$$

РЕШЕНИЕ.

Область *D* –треугольник:



$$\iint_D \sin(x+y)\,dxdy = \iint_{D_1} \sin(x+y)\,dxdy + \iint_{D_2} \sin(x+y)\,dxdy =$$

$$= \int_0^{\pi/4} dx \int_0^{x} \sin(x+y)\,dy + \int_{\pi/4}^{\pi/2} dx \int_0^{\pi/2 - x} \sin(x+y)\,dy =$$

$$= -\int_0^{\pi/4} dx \cdot \cos(x+y)\Big|_0^{x} - \int_{\pi/4}^{\pi/2} dx \cdot \cos(x+y)\Big|_0^{\pi/2 - x} =$$

$$= -\int_0^{\pi/4} dx \cdot (\cos 2x - \cos x) - \int_{\pi/4}^{\pi/2} dx \cdot \left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos x\right) =$$

$$=\left(-\frac{1}{2}\sin 2x+\sin x\right)\Bigg|_{0}^{\pi/4}+\sin x\Big|_{\pi/4}^{\pi/2}=$$

$$=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}+1-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}$$