

17.5. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ В ДВОЙНОМ ИНТЕГРАЛЕ

Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна в некоторой замкнутой ограниченной области D , и существует

$$\iint_D f(x, y) dx dy$$

Предположим, что возможен переход к новым переменным:

$$(x, y) \Rightarrow (u, v)$$

$$x = x(u, v)$$

$$y = y(u, v)$$

$$u = u(x, y)$$

$$v = v(x, y)$$

ТЕОРЕМА.

Пусть преобразование $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$ переводит замкнутую ограниченную область D в замкнутую ограниченную область D^* и является взаимно однозначным.

Если функции $x(u,v)$, $y(u,v)$ имеют в D^* непрерывные частные производные, и выражение

$$\frac{\partial(xy)}{\partial(uv)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$$

то умеет место

*формула замены переменной
в двойном интеграле:*

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f[x(u, v), y(u, v)] \cdot \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

$$\frac{\partial(xy)}{\partial(uv)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

якобиан перехода

ПРИМЕРЫ.



Вычислить двойной интеграл

$$\iint_D \sin(x + y) \, dx \, dy$$

где область D ограничена линиями

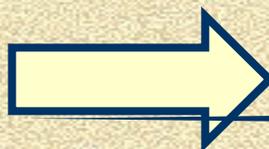
$$x = y, \quad x + y = \frac{\pi}{2}, \quad y = 0$$

РЕШЕНИЕ.

Введем новые переменные:

$$x + y = u$$

$$x - y = v$$



$$x = \frac{u + v}{2}$$

$$y = \frac{u - v}{2}$$

Тогда прямая $x + y = \frac{\pi}{2}$ переходит в прямую

$$u = \frac{\pi}{2}$$

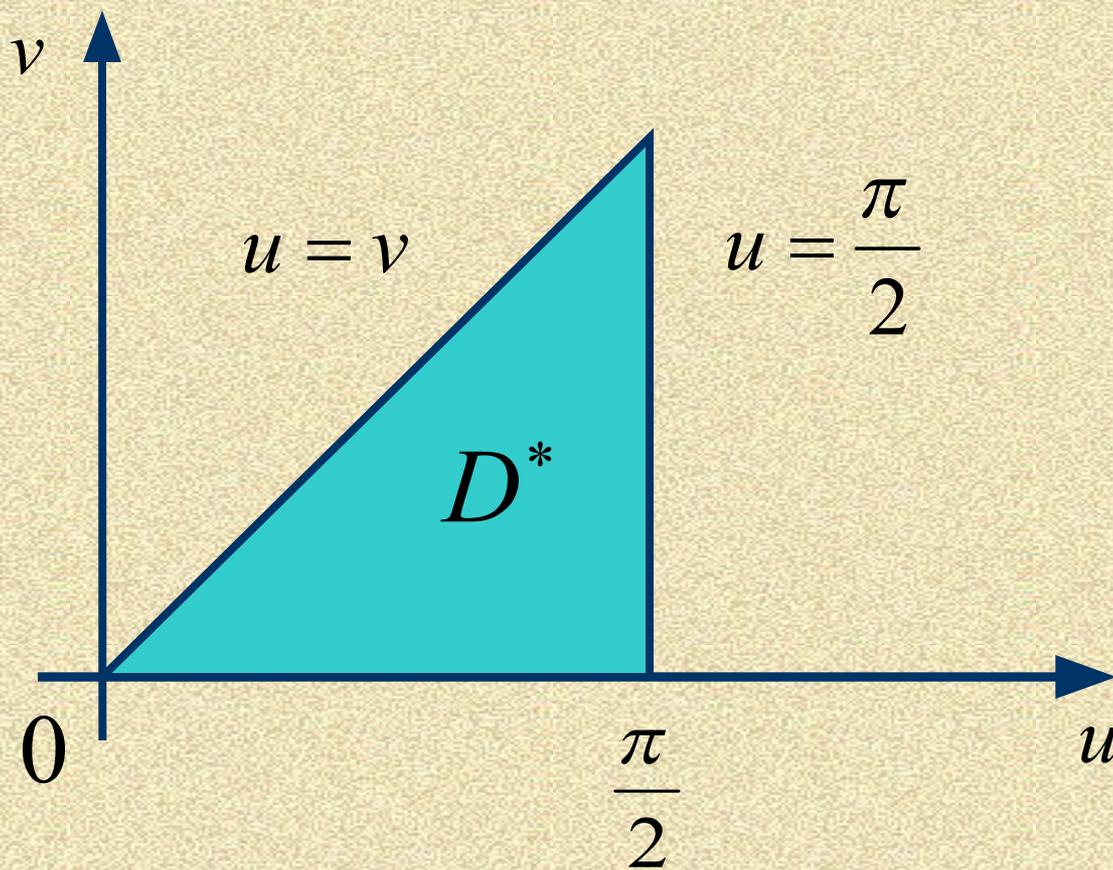
Прямая $x = y$ переходит в прямую

$$v = 0$$

Прямая $y = 0$ переходит в прямую

$$v = u$$

Область D^* –треугольник:



Найдем якобиан:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{2}$$

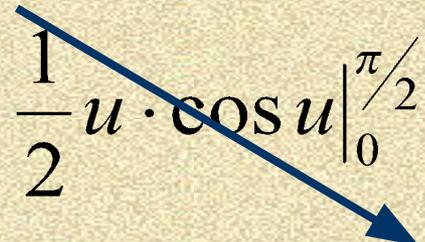
$$\frac{\partial y}{\partial v} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial(xy)}{\partial(uv)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

$$\left| \frac{\partial(xy)}{\partial(uv)} \right| = \frac{1}{2}$$

$$\iint_D \sin(x+y) \, dx \, dy = \frac{1}{2} \iint_{D^*} \sin u \, du \, dv = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} du \int_0^u \sin u \, dv =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} du \cdot \sin u \cdot v \Big|_0^u = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} du \cdot \sin u \cdot u =$$

$$= \frac{1}{2} u \cdot \cos u \Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos u \, du = \frac{1}{2} \sin u \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}$$




Вычислить двойной интеграл

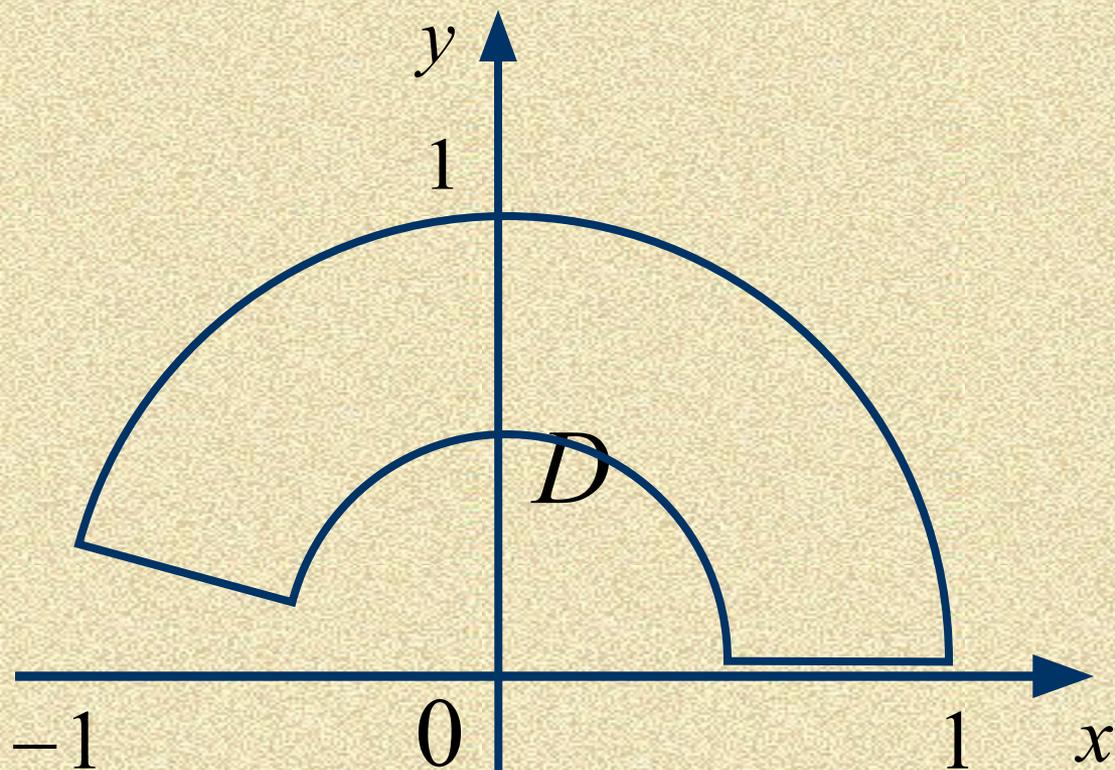
$$\iint_D e^{x^2+y^2} dx dy$$

**где область D ограничена осью x и
верхней полуокружностью**

$$x^2 + y^2 = 1$$

РЕШЕНИЕ.

Область D – полуокружность:



Введем новые переменные:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \rho \cdot \cos \varphi \\ y = \rho \cdot \sin \varphi \end{array} \right.$$
$$0 \leq \varphi \leq \pi$$

Прямая $y = 0$ переходит в прямую

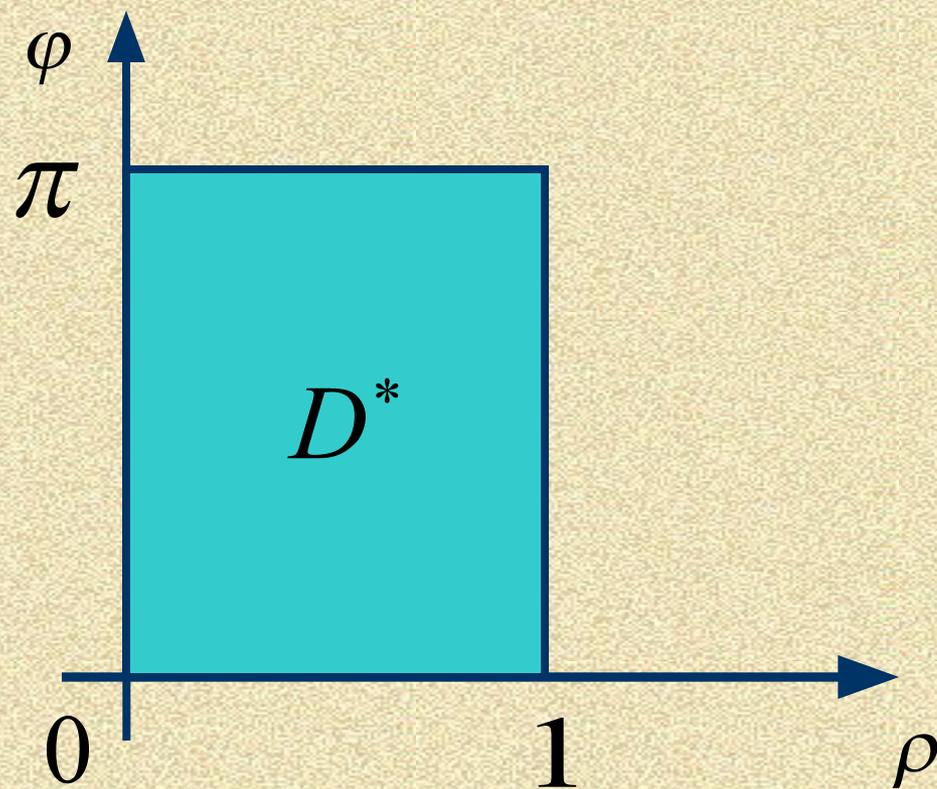
$$\varphi = \pi$$

Полукружность $x^2 + y^2 = 1$

переходит в прямую

$$\rho = 1$$

Область D^* –прямоугольник:



Найдем якобиан:

$$\frac{\partial x}{\partial \rho} = \cos \varphi$$

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = -\rho \sin \varphi$$

$$\frac{\partial y}{\partial \rho} = \sin \varphi$$

$$\frac{\partial y}{\partial \varphi} = \rho \cos \varphi$$

$$\frac{\partial(xy)}{\partial(\rho\varphi)} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho \cos^2 \varphi + \rho \sin^2 \varphi = \rho$$

$$\left| \frac{\partial(xy)}{\partial(\rho\varphi)} \right| = \rho$$

$$\iint_D e^{x^2+y^2} dx dy = \iint_{D^*} \rho \cdot e^{\rho^2} d\rho d\varphi = \int_0^\pi d\varphi \int_0^1 \rho \cdot e^{\rho^2} d\rho =$$

$$= \int_0^\pi d\varphi \left(\frac{1}{2} e^{\rho^2} \right) \Big|_0^1 = \int_0^\pi d\varphi \left(\frac{1}{2} e - \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{2} (e - 1)$$