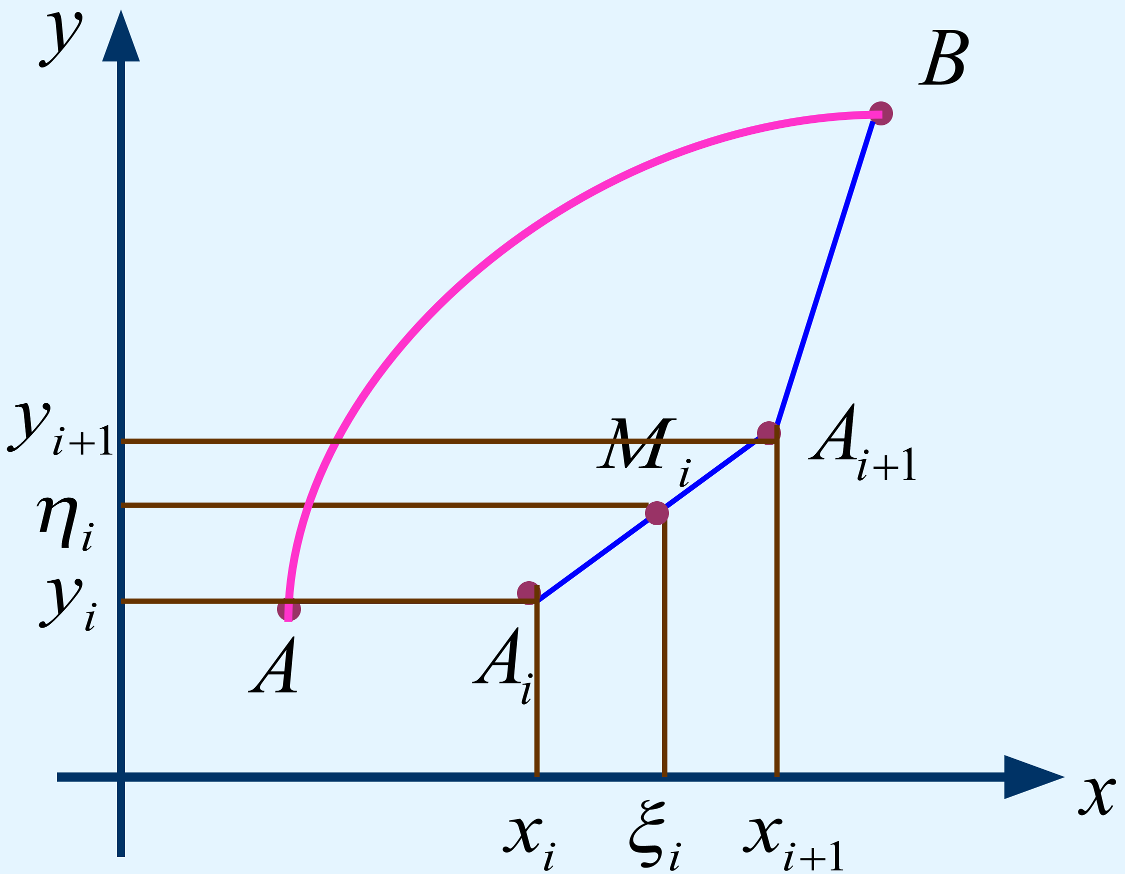
19.3. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ 2 РОДА

Рассмотрим произвольную функцию f(x,y), заданную вдоль непрерывной плоской кривой АВ.

Разобьем эту кривую на элементарные дуги A_iA_{i+1} и соединим точки A_i ломаной.

На каждом участке ломаной выберем точку $M_i(\xi_i, \eta_i)$ и вычислим значение функции в этой точке:

$$f(\xi_i,\eta_i) = f(M_i)$$


y
B
y_{i+1}
M_i
A_{i+1}
η_i
y_i
A
A_i
x
x_i
ξ_i
x_{i+1}

Сумму вида

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta x_i$$

где $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, называют интегральной суммой для функции $f(x,y)$ по кривой AB.

Если существует конечный предел интегральной суммы при стремлении к нулю наибольшей из всех дуг μ, не зависящий от способа разбиения кривой AB и выбора точек **M***$_i$, то он называется* ***<u>криволинейным интегралом второго рода</u>*** *от функции f(x,y) по кривой AB.*

$$\lim_{\max \mu \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta x_i = \int_{AB} f(x, y) dx$$

Аналогично можно определить интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta y_i$$

Тогда

$$\lim_{\max \mu \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta y_i = \int_{AB} f(x, y) dy$$

Если вдоль кривой АВ определены две функции P(x,y) и Q(x,y) и существуют интегралы

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx \quad и \quad \int\limits_{AB} Q(x,y)dy$$

то их сумму называют <u>криволинейным интегралом общего вида:</u>

$$\boxed{\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{AB} P(x,y)dx + \int\limits_{AB} Q(x,y)dy}$$

Сравним криволинейные интегралы 1 и 2 рода.

У криволинейных интегралов 1 рода в интегральной сумме стоит длина участка разбиения дуги:

$$\sigma_i = A_i A_{i+1}$$

У интегралов 2 рода в интегральной сумме стоит проекция этого участка на ось x или y:

$$\Delta x_i \quad \text{или} \quad \Delta y_i$$

Проекция зависит от направления кривой и меняет знак при смене направления:

$$\int_{AB} f(x, y)dx = -\int_{BA} f(x, y)dx$$

$$\int_{AB} f(x, y)dy = -\int_{BA} f(x, y)dy$$

Понятие криволинейного интеграла можно обобщить на пространственную кривую:

$$\int\limits_{AB} f(x,y,z)dx \qquad \int\limits_{AB} f(x,y,z)dy \qquad \int\limits_{AB} f(x,y,z)dz$$

Тогда интеграл общего вида будет:

$$\boxed{\begin{aligned}&\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \\ &= \int\limits_{AB} P(x,y,z)dx + \int\limits_{AB} Q(x,y,z)dy + \int\limits_{AB} R(x,y,z)dz\end{aligned}}$$