# 19.4. ВЫЧИСЛЕНИЕ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ 2 РОДА

**Пусть кривая *AB* задана параметрически:**

$$x = \varphi(t)$$

$$y = \psi(t)$$

**где**

$$\alpha \le t \le \beta$$

**и функции** $\varphi(t) \quad u \quad \psi(t)$

**непрерывны вместе со своими производными.**

**Пусть также при изменении параметра $t$ от $\alpha$ к $\beta$, кривая описывается от точки $A$ к $B$.**

**Тогда криволинейный интеграл существует и**

$$\int_{AB} f(x,y)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t),\psi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt$$

$$\int_{AB} f(x,y)\,dy = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t),\psi(t))\cdot\psi'(t)\,dt$$

## Для интеграла общего вида:

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} \left(P(\varphi(t),\psi(t))\cdot\varphi'(t) + Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)\right)dt$$

**Если, например, интеграл берется по кривой, заданной уравнением**

$$y = y(x)$$

$$a \leq x \leq b$$

**То**

$$\boxed{\int\limits_{AB} f(x, y)dx = \int\limits_a^b f(x, y(x))dx}$$

**Если**

$$x = x(y)$$

$$c \le y \le d$$

**То**

$$\boxed{\int_{AB} f(x,y)\,dy = \int_c^d f(y, x(y))\,dy}$$

# ПРИМЕРЫ.

1

**Вычислить криволинейный интеграл**

$$\int_L (x^2 - y^2)\,dx$$

***где L- отрезок параболы $y=x^2$, заключенный между точками x=0 и x=2.***

# Решение.

$$\int\limits_L (x^2 - y^2)dx = \int\limits_0^2 \left(x^2 - x^4\right)dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^2 = -\frac{56}{15}$$

2

**Вычислить криволинейный интеграл**

$$\int_L \frac{y^2dx - x^2dy}{x^2 + y^2}$$

**где L- полуокружность**

$$x = a\cos t$$

$$y = a\sin t$$

$$0 \le t \le \pi$$

# Решение.

$$\int_L \frac{y^2dx - x^2dy}{x^2 + y^2} =$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{a^2 \sin^2 t \cdot (-a \sin^2 t) - a^2 \cos^2 t \cdot a \cos t}{a^2 (\sin^2 t + \cos^2 t)} dt =$$

$$= -a \int_0^{\pi} (\sin^3 t + \cos^3 t) dt =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \sin^3 t = \frac{1}{4}\left(3\sin t - \sin 3t\right) \\ \cos^3 t = \frac{1}{4}\left(3\cos t + \cos 3t\right) \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{a}{4}\int_0^{\pi}\left(3\sin t - \sin 3t + 3\cos t + \cos 3t\right)dt =$$

$$= -\frac{a}{4}\left(-3\cos t + \frac{1}{3}\cos 3t + 3\sin t + \frac{1}{3}\sin 3t\right)\Bigg|_0^{\pi} = -\frac{5}{3}a$$