19.5. ФОРМУЛА ГРИНА

Формула Грина связывает криволинейный интеграл по замкнутому контуру с двойным интегралом по области, ограниченной этим контуром.

ТЕОРЕМА.

Если функции P(x,y) и Q(x,y) непрерывны вместе со своими частными производными в области D, то имеет место формула

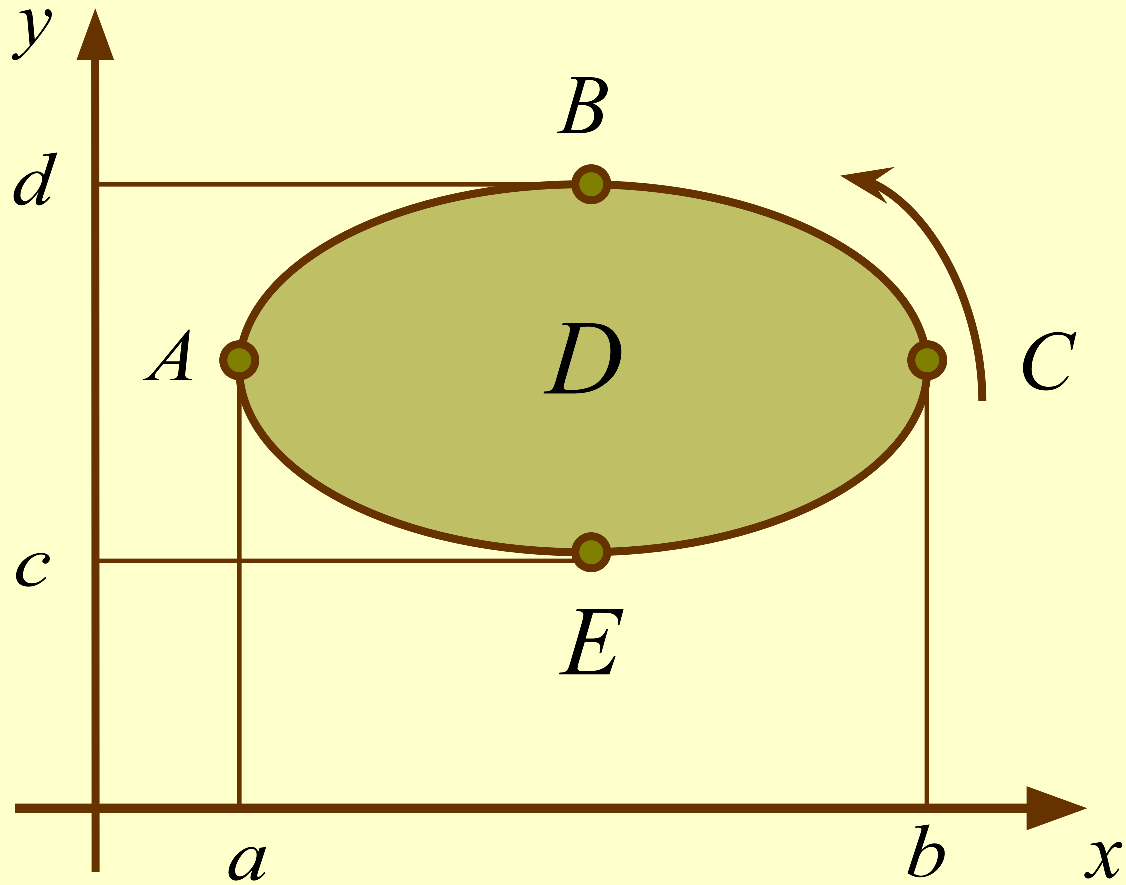
$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \int\limits_L Pdx + Qdy$$

Где *L* – граница области D и интегрирование по L ведется в положительном направлении.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

Рассмотрим в плоскости XOY область D, ограниченную контуром L.

За положительное направление выбираем обход против часовой стрелки.


y
B
d
A
D
C
c
E
a
b
x

Преобразуем двойной интеграл:

$$\iint_D \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}dy =$$

где $y = y_1(x)$ - уравнение линии AEC

$y = y_2(x)$ - уравнение линии ABC

$$= \int_a^b \left(P(x,y)\Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} \right) dx = \int_a^b \left(P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x)) \right) dx =$$

$$= \int_a^b P(x, y_2(x))\,dx + \int_b^a P(x, y_1(x))\,dx =$$

$$= \int_{ABC} P(x, y)\,dx + \int_{CEA} P(x, y)\,dx$$

Сумма этих интегралов будет криволинейным интегралом по контуру L, обходимому в отрицательном направлении.

$$\boxed{\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}dxdy = -\int\limits_L Pdx}$$

1

Аналогично можно показать:

$$\iint\limits_D \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}dx =$$

где $x = x_1(y)$ **- уравнение линии EAB**

$x = x_2(y)$ **- уравнение линии ECB**

$$= \int_c^d \left(Q(x,y)\Big|_{x_1(y)}^{x_2(y)} \right) dy = \int_c^d \left(Q(x_2(y),y) - Q(x_1(y),y) \right) dy =$$

$$= \int_c^d Q(x_2(y),y)\,dy + \int_c^d Q(x_1(y),y)\,dy =$$

$$= \int_{ECB} Q(x,y)\,dy + \int_{BAE} Q(x,y)\,dy$$

Сумма этих интегралов будет криволинейным интегралом по контуру L, обходимому в положительном направлении.

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \int_L Qdy$$

2

Вычитаем из (2) (1):

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \int_L Pdx + Qdy$$