20. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

20.1. ПОНЯТИЕ ПОВЕРХНОСТНОГО ИНТЕГРАЛА

Понятие двойного интеграла по плоской области обобщается на случай интегрирования по поверхности.

Пусть *S* – некоторая поверхность, *f(x,y,z)* – непрерывная функция на поверхности *S*.

Разобьем поверхность *S* на части с площадями ΔG_i. На каждой части выберем точку

$$M_i(x_i, y_i, z_i)$$

Сумму вида

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\cdot \Delta G_i}$$

называют интегральной суммой для функции f(x,y,z) по поверхности S.

Если существует конечный предел интегральной суммы при стремлении к 0 диаметра каждой площадки разбиения, не зависящий от способа разбиения поверхности S и выбора точек (x_i,y_i,z_i), то он называется <u>интегралом по поверхности S</u> от функции f(x,y,z).

$$\lim_{\max \Delta G \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta G_i = \iint_S f(x, y, z) dG$$

Свойства поверхностных интегралов аналогичны свойствам двойных интегралов.

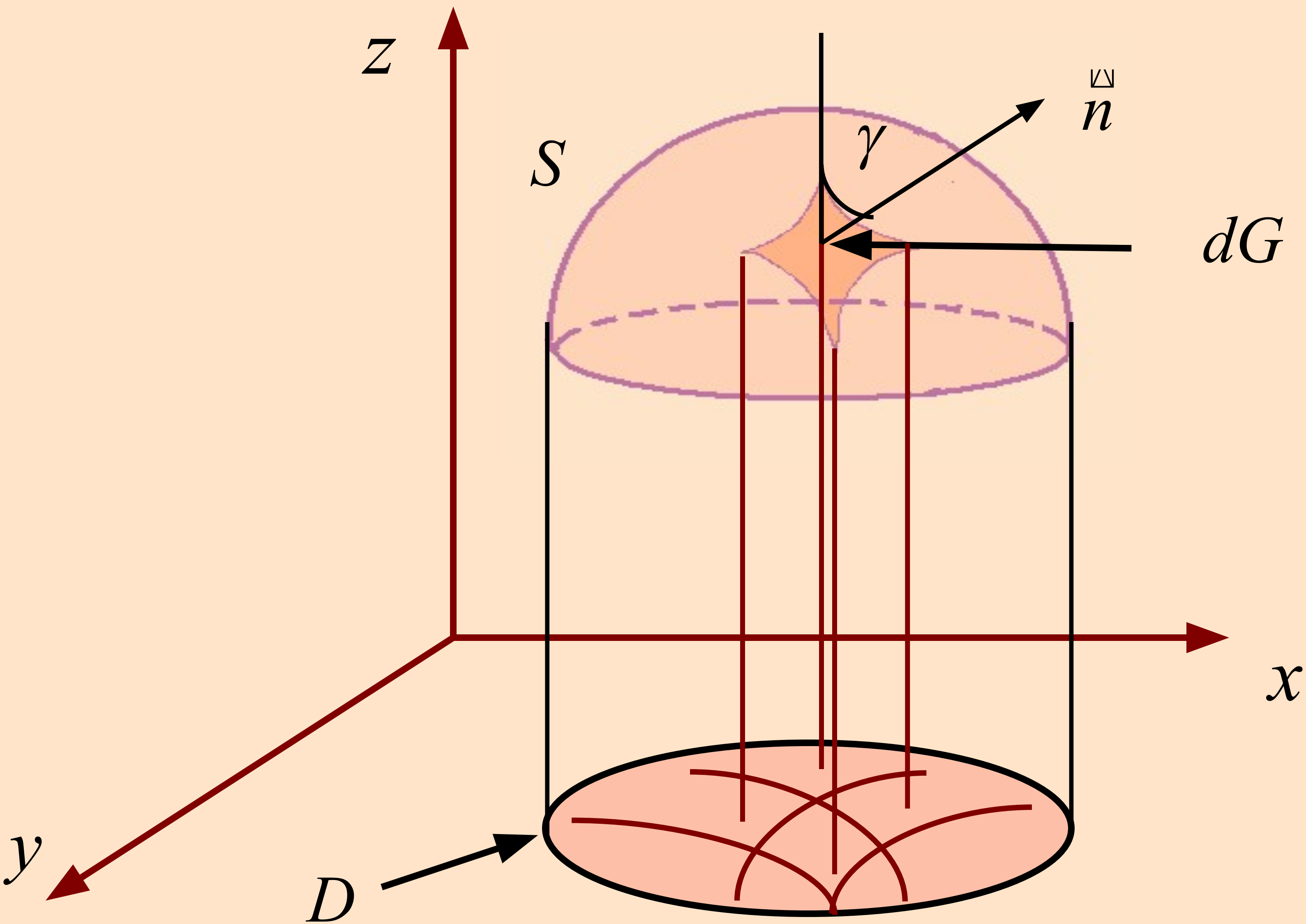
Рассмотрим вычисление поверхностных интегралов.

Пусть дан поверхностный интеграл

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\,dG$$

и поверхность *S* задана уравнением *z=z(x,y)*.

В этом случае вычисление поверхностного интеграла сведется к вычислению двойного интеграла по области *D* – проекции поверхности *S* на плоскость ХОУ.



z
S
γ
n
dG
x
y
D

Выберем элемент площади *dxdy* плоскости *D* и проектирующийся в него элемент площади *ΔG* поверхности S.

Проведем нормаль к *ΔG* так, чтобы она образовывала острый угол γ с oz.

Тогда

$$dxdy = dG\cos\gamma$$

Нормаль к поверхности *z=z(x,y)* имеет проекции

$$z'_x, \quad z'_y, \quad -1$$

$$\Rightarrow \qquad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}}$$

Тогда

$$dG = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} \cdot dxdy$$

$$\iint\limits_S f(x, y, z)dG =$$

$$= \iint\limits_D f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} \cdot dxdy$$