20.2. ТЕОРЕМА ГАУССА-ОСТРОГРАДСКОГО

Эта формула связывает интеграл по объему V с интегралом по поверхности S, ограничивающей этот объем.

ТЕОРЕМА.

Пусть V – некоторая область в пространстве, S – граница этой области.
Если функции P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z) непрерывны вместе со своими частными производными во всех точках области V, то справедлива формула:

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV =$$

$$= \iint\limits_S \left(P \cdot \cos\alpha + Q \cdot \cos\beta + R \cdot \cos\gamma \right) dS$$

Где α, β, γ – углы, образованные внешней нормалью и осями x,y,z.

формула Гаусса-Остроград

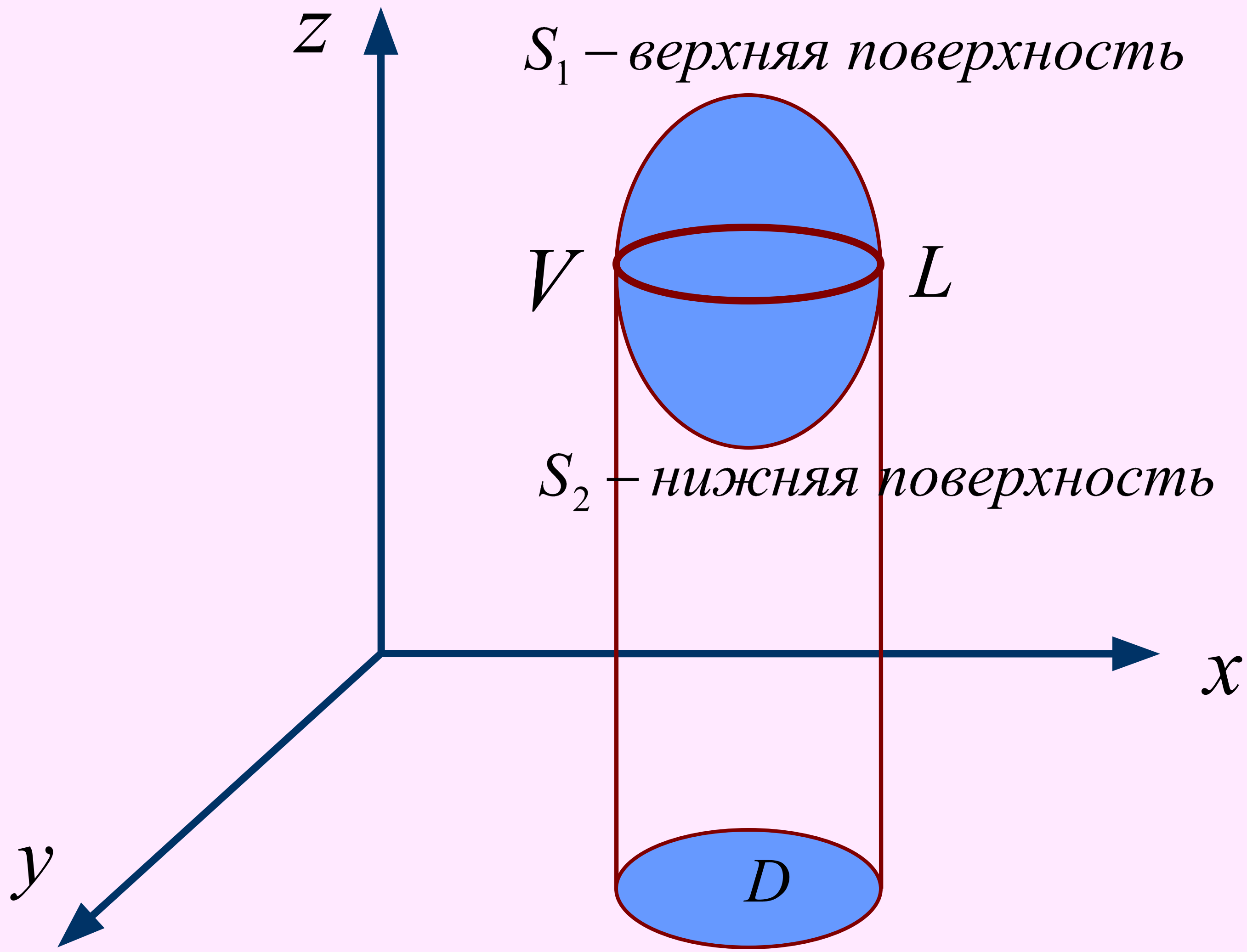
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

Рассмотрим область V, ограниченную поверхностью S.

Пусть существует интеграл

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV$$

Проведем цилиндрическую поверхность, проектирующую область V на плоскость XOY.



z
S_1 – верхняя поверхность
V
L
S_2 – нижняя поверхность
x
y
D

D **– проекция областей S_1 и S_2 на плоскость XOY.**

$$S_1 : z_1 = z_1(x,y)$$

$$S_2 : z_2 = z_2(x,y)$$

Сначала проинтегрируем по *z*:

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz =$$

$$= \iint\limits_D R(x, y, z_2(x, y))dxdy - \iint\limits_D R(x, y, z_1(x, y))dxdy =$$

Учтем, что

$$\iint\limits_S R(x, y, z)\cos\gamma dG = \iint\limits_D R(x, y, z(x, y))dxdy$$

$$= \iint\limits_{+S_2} R(x,y,z)\cos\gamma dG - \iint\limits_{+S_1} R(x,y,z)\cos\gamma dG =$$

$$= \iint\limits_{+S_2} R(x,y,z)\cos\gamma dG + \iint\limits_{-S_1} R(x,y,z)\cos\gamma dG$$

Верхняя и нижняя стороны являются внешними сторонами поверхности S, поэтому

$$\boxed{\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint\limits_S R\cos\gamma dG} \qquad \boxed{1}$$

Аналогично

$$\iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y} dxdydz = \iint_S Q \cos \beta dG$$

2

$$\iiint_V \frac{\partial P}{\partial x} dxdydz = \iint_S P \cos \alpha dG$$

3

Складываем почленно (1), (2), (3):

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV =$$

$$= \iint\limits_S \left(P \cdot \cos\alpha + Q \cdot \cos\beta + R \cdot \cos\gamma \right) dS$$