21.6. ДУ второго порядка, допускащие понижение степени

Существуют три вида уравнений второго порядка, допускающих понижение степени.

1

Уравнения вида $y'' = f(x)$

Введем новую функцию:

$$\boxed{z(x) = y'}$$

Тогда исходное уравнение станет неполным уравнением первого порядка:

Его решение:

Возвращаемся к старой переменной:

$$y = \int \left(\int f(x)dx \right) dx + C_1 \cdot x + C_2$$

Рассмотренный в предыдущем параграфе пример относится к этому случаю.

2

Уравнения вида $y'' = f(x, y')$

Введем новую функцию:

$$z(x) = y'$$

Находим общее решение этого уравнения:

Затем проинтегрируем его и найдем общее решение исходного уравнения:

$$y(x) = \int \varphi(x, C_1)dx + C_2$$

ПРИМЕР.

Решить дифференциальное уравнение:

$$x \cdot y'' + y' = 0$$

Решение:

В это уравнение явно не входит *y*. Делаем замену:

Разделяем переменные:

Возвращаемся к старой переменной:

3

Уравнения вида $y'' = f(y, y')$

Введем новую функцию:

$$\boxed{z(y) = y'}$$

По правилу дифференцирования сложной функции:

Тогда исходное уравнение преобразуется в ДУ первого порядка относительно функции *z(y)*:

Пусть общее решение этого уравнения

Тогда обратной заменой получаем неполное уравнение первого порядка относительно *y(x)*:

Решаем его методом разделения переменных:

$$\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2$$

Отсюда находим искомую функцию *y=y(x)*.

ПРИМЕР.

Решить дифференциальное уравнение:

$$y'' - (y')^2 = 0$$

Решение:

В это уравнение явно не входит *x*. Делаем замену:

Первое решение этого уравнения:

Возвращаемся к старой переменной: