



21.7. Лине́йные ДУ второго по

Линейным дифференциальным уравнением второго порядка (ЛДУ) называется уравнение вида

$$y'' + p(x) \cdot y' + g(x) \cdot y = f(x)$$



Где y – искомая функция, $p(x)$, $g(x)$, $f(x)$ – функции, непрерывные на некотором интервале (a,b) .

Если $f(x)=0$, то уравнение называется линейным однородным.

Если $f(x)$ не равно 0, то уравнение называется линейным неоднородным.



Если разрешить это уравнение относительно второй производной, то оно будет являться частным случаем уравнения

$$y'' = f(x, y, y')$$

и будет удовлетворять условиям теоремы Коши. Поэтому для любых начальных условий это уравнение имеет единственное решение задачи Коши.



А

ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ДУ ВТОРОГО ПОРЯДКА

*Линейным однородным ДУ второго
порядка называется уравнение вида*

$$y'' + p(x) \cdot y' + g(x) \cdot y = 0$$



ТЕОРЕМА.

Пусть функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – решения уравнения (7). Тогда функция

$$y = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x)$$

тоже будет решением этого уравнения при любых значениях постоянных C_1 и C_2 .



Доказательство:

Найдем первую и вторую производные от этой функции:

$$y' = C_1 \cdot y_1'(x) + C_2 \cdot y_2'(x)$$

$$y'' = C_1 \cdot y_1''(x) + C_2 \cdot y_2''(x)$$

и подставим их в исходное уравнение (7):

$$C_1 \cdot y_1''(x) + C_2 \cdot y_2''(x) + p(x) \cdot (C_1 \cdot y_1'(x) + C_2 \cdot y_2'(x)) + \\ + g(x)(C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x)) =$$



$$\begin{aligned} &= C_1 \cdot y_1''(x) + C_2 \cdot y_2''(x) + p(x) \cdot C_1 \cdot y_1'(x) + \\ &+ p(x) \cdot C_2 \cdot y_2'(x) + g(x) \cdot C_1 \cdot y_1(x) + g(x) \cdot C_2 \cdot y_2(x) = \\ &= C_1 \cdot (y_1''(x) + p(x) \cdot y_1'(x) + g(x) \cdot y_1(x)) + \\ &+ C_2 \cdot (y_2''(x) + p(x) \cdot y_2'(x) + g(x) \cdot y_2(x)) = 0 \end{aligned}$$

(поскольку функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – решения этого уравнения).





Ранее было введено понятие линейной зависимости векторов. По аналогии можно ввести понятие линейной зависимости функций.

Функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ называются линейно зависимыми на интервале (a, b) , если существуют такие числа α_1, α_2 , что для любого x из этого интервала выполняется равенство:

$$\alpha_1 \cdot y_1(x) + \alpha_2 \cdot y_2(x) = 0$$



Линейно зависимые функции оказываются пропорциональными, т.е.

$$y_1(x) = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot y_2(x) \qquad y_2(x) = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \cdot y_1(x)$$

Обратное утверждение тоже верно: если две функции пропорциональны на интервале (a, b) , то они линейно зависимы на этом интервале.

Если указанное равенство не выполняется, то функции будут называться линейно независимыми.



Введем для случая двух функций

определитель Врон

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 \cdot y_2' - y_2 \cdot y_1'$$



ТЕОРЕМА.

Если функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно зависимы на интервале (a, b) , то определитель Вронского, составленный из них, равен нулю. Если же эти функции линейно независимы, то определитель Вронского отличен от нуля.



Доказательство:

Пусть функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно зависимы на интервале (a, b) . Тогда они будут пропорциональны, т.е.

$$y_2 = k \cdot y_1 \Rightarrow y_2' = k \cdot y_1'$$

Следовательно

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & k \cdot y_1 \\ y_1' & k \cdot y_1' \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} y_1 & y_1 \\ y_1' & y_1' \end{vmatrix} = 0$$

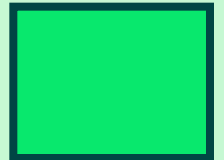


Вторую часть теоремы докажем от противного:
Пусть функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно
независимы на интервале (a, b) . Предположим,
что

$$W(x) = 0$$

Тогда его столбцы будут пропорциональны,
следовательно, пропорциональны сами функции,
и тогда функции должны быть линейно
зависимы, что противоречит условию теоремы.

Таким образом, если функции линейно
независимы, то определитель Вронского отличен
от нуля.





ТЕОРЕМА.

Пусть решения уравнения (7) $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – линейно независимы на (a, b) , тогда функция

$$y = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x)$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные, является общим решением этого уравнения.



Доказательство:

Функция

$$y = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x)$$

является решением уравнения (7). Нужно показать, что она представляет собой общее решение, т.е. что из нее можно выделить частное решение, удовлетворяющее любым начальным условиям.

Выберем любые числа

$$x_0 \in (a, b), \quad y_0, \quad y'_0$$



Составим из них начальные условия:

$$y|_{x=x_0} = y_0 \quad y'|_{x=x_0} = y'_0$$

Подставим в левую часть этих условий функцию

$$y = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x)$$

Получим систему двух линейных уравнений относительно неизвестных чисел C_1 и C_2 :

$$\begin{cases} C_1 \cdot y_1(x_0) + C_2 \cdot y_2(x_0) = y_0 \\ C_1 \cdot y_1'(x_0) + C_2 \cdot y_2'(x_0) = y'_0 \end{cases}$$



Определитель этой системы

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix}$$

есть определитель Вронского.

Поскольку y_1 и y_2 – линейно независимы, то

$$W(x) \neq 0$$

и система будет иметь единственное решение

$$C_1 = C_1^0 \quad C_2 = C_2^0$$



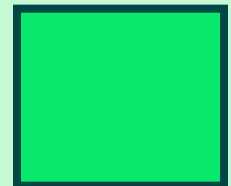
Подставляем эти решения в исходную функцию:

$$y = C_1^0 \cdot y_1(x) + C_2^0 \cdot y_2(x)$$

Получили частное решение, удовлетворяющее произвольно выбранным начальным условиям. Следовательно, функция

$$y = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x)$$

действительно является общим решением уравнения (7).





ПРИМЕРЫ.

1

Установить, будет ли функция

$$y = C_1 \cdot \sin x + C_2 \cdot \cos x$$

общим решением уравнения

$$y'' + y = 0$$



Решение:

По теореме это решение будет общим, если функции

$$\sin x \quad \text{и} \quad \cos x$$

являются решением этого уравнения и будут линейно независимыми.

Проверяем:

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$



$$-\sin x + \sin x = 0$$



$$(\cos x)' = -\sin x$$



$$-\cos x + \cos x = 0$$

$$(-\sin x)' = -\cos x$$

Следовательно, данные функции являются решением этого уравнения. Проверим, будут ли они линейно независимыми.

Вычислим определитель Вронского:

$$W(x) = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} =$$

$$= \sin x \cdot (-\sin x) - \cos x \cdot \cos x = -1 \neq 0$$



Следовательно, данные функции являются линейно независимыми.

Таким образом, функция

$$y = C_1 \cdot \sin x + C_2 \cdot \cos x$$

будет общим решением заданного уравнения.



2

Установить, будет ли функция

$$y = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^{3x}$$

общим решением уравнения

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$



Решение:

По теореме это решение будет общим, если функции

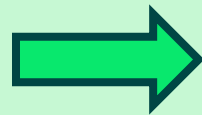
$$e^{2x} \quad \text{и} \quad e^{3x}$$

являются решением этого уравнения и будут линейно независимыми.

Проверяем:

$$(e^{2x})' = 2e^{2x}$$

$$(e^{2x})'' = 4e^{2x}$$



$$4e^{2x} - 5 \cdot 2e^{2x} + 6 \cdot e^{2x} = 0$$



$$(e^{3x})' = 3e^{3x}$$

$$(e^{3x})'' = 9e^{3x}$$



$$9e^{3x} - 5 \cdot 3e^{3x} + 6 \cdot e^{3x} = 0$$

Следовательно, данные функции являются решением этого уравнения. Проверим, будут ли они линейно независимыми.

Вычислим определитель Вронского:

$$\begin{aligned} W(x) &= \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{3x} \\ 2e^{2x} & 3e^{3x} \end{vmatrix} = \\ &= 3e^{2x} \cdot e^{3x} - 2e^{2x} \cdot e^{3x} \neq 0 \end{aligned}$$



Следовательно, данные функции являются линейно независимыми.

Таким образом, функция

$$y = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^{3x}$$

будет общим решением заданного уравнения.



Б

ЛИНЕЙНЫЕ НЕОДНОРОДНЫЕ ДУ ВТОРОГО ПОРЯДКА

*Линейным неоднородным ДУ второго
порядка называется уравнение вида*

$$y'' + p(x) \cdot y' + g(x) \cdot y = f(x)$$



ТЕОРЕМА.

Общее решение уравнения (8) состоит из суммы его частного решения и общего решения соответствующего ему однородного уравнения.



Доказательство:

Пусть

$$\tilde{y}(x) = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x)$$

- общее решение соответствующего однородного уравнения (7), и пусть

$$Y(x)$$

- какое-либо частное решение неоднородного уравнения (8).



Сначала покажем, что функция

$$y(x) = Y(x) + \tilde{y}(x)$$

является решением уравнения (8).

$$y'(x) = Y'(x) + \tilde{y}'(x)$$

$$y''(x) = Y''(x) + \tilde{y}''(x)$$

Подставляем в уравнение (8):



$$Y''(x) + \tilde{y}''(x) + p(x) \cdot Y'(x) + p(x) \cdot \tilde{y}'(x) + \\ + g(x) \cdot Y(x) + q(x) \cdot \tilde{y}(x) \diamond =$$

Учтем, что

$$\tilde{y}'(x) = C_1 \cdot y_1'(x) + C_2 \cdot y_2'(x)$$

$$\tilde{y}''(x) = C_1 \cdot y_1''(x) + C_2 \cdot y_2''(x)$$

Тогда



$$\begin{aligned} \diamond \Rightarrow & Y''(x) + C_1 \cdot y_1''(x) + C_2 \cdot y_2''(x) + p(x) \cdot Y'(x) + \\ & + p(x) \cdot C_1 \cdot y_1'(x) + p(x) \cdot C_2 \cdot y_2'(x) + g(x) \cdot Y(x) + \\ & + g(x) \cdot C_1 \cdot y_1(x) + q(x) \cdot C_2 \cdot y_2(x) = \\ & = [Y''(x) + p(x) \cdot Y'(x) + g(x) \cdot Y(x)] + \\ & [C_1 \cdot y_1''(x) + p(x) \cdot C_1 \cdot y_1'(x) + g(x) \cdot C_1 \cdot y_1(x)] + \\ & + [C_2 \cdot y_2''(x) + p(x) \cdot C_2 \cdot y_2'(x) + g(x) \cdot C_2 \cdot y_2(x)] = \\ & = f(x) \end{aligned}$$



Таким образом, функция

$$y(x) = Y(x) + \tilde{y}(x)$$

является решением уравнения (8).

Теперь нужно показать, что она является общим решением этого уравнения.

Рассмотрим разность

$$y(x) - Y(x)$$

где $y(x)$ – любое решение уравнения (8). Эта разность является решением однородного уравнения

$$y'' + p(x) \cdot y' + g(x) \cdot y = 0$$



Поскольку

$$(y(x) - Y(x))' = y'(x) - Y'(x)$$

$$(y(x) - Y(x))'' = y''(x) - Y''(x)$$

Подставляем в это уравнение:

$$y''(x) - Y''(x) + p(x) \cdot y'(x) - \\ - p(x) \cdot Y'(x) + g(x) \cdot y(x) - g(x) \cdot Y(x) =$$



$$\begin{aligned} &= \left[y''(x) + p(x) \cdot y'(x) + g(x) \cdot y(x) \right] - \\ &- \left[Y''(x) + p(x) \cdot Y'(x) + g(x) \cdot Y(x) \right] = \\ &= f(x) - f(x) = 0 \end{aligned}$$

Следовательно, эту разность можно записать в виде частного решения однородного уравнения (7):

$$y(x) - Y(x) = C_1^0 \cdot y_1(x) + C_2^0 \cdot y_2(x)$$



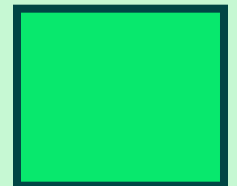
**Таким образом, любое решение уравнения (8)
можно получить по формуле:**

$$y(x) = Y(x) + \tilde{y}(x)$$

путем подбора произвольных постоянных

$$C_1 \quad \text{и} \quad C_2$$

**Это и означает, что данная функция является
общим решением неоднородного уравнения.**





Таким образом, чтобы найти общее решение неоднородного уравнения (8) нужно найти общее решение соответствующего однородного уравнения (7), а затем – какое-либо частное решение неоднородного уравнения, и эти решения сложить.



Для нахождения частного решения неоднородного уравнения используется

метод вариации постоянных

Пусть

$$\tilde{y}(x) = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x)$$

- общее решение однородного уравнения (7). Будем считать, что частное решение неоднородного уравнения (8) имеет такой же вид, но произвольные постоянные C_1 и C_2 сами являются функциями от x :



$$C_1 = C_1(x) \quad C_2 = C_2(x)$$

Тогда

$$Y(x) = C_1(x) \cdot y_1(x) + C_2(x) \cdot y_2(x)$$

Дифференцируем это равенство:

$$Y'(x) = C_1'(x) \cdot y_1(x) + C_1(x) \cdot y_1'(x) + \\ + C_2'(x) \cdot y_2(x) + C_2(x) \cdot y_2'(x)$$

Положим функции

$$C_1 = C_1(x) \quad C_2 = C_2(x)$$



такими, что выполняется равенство:

$$C_1'(x) \cdot y_1(x) + C_2'(x) \cdot y_2(x) = 0$$

Тогда

$$Y'(x) = C_1(x) \cdot y_1'(x) + C_2(x) \cdot y_2'(x)$$

Находим вторую производную:

$$Y''(x) = C_1'(x) \cdot y_1'(x) + C_1(x) \cdot y_1''(x) + \\ + C_2'(x) \cdot y_2'(x) + C_2(x) \cdot y_2''(x)$$



Подставляем найденные производные в уравнение (8):

$$\begin{aligned} C_1'(x) \cdot y_1'(x) + C_1(x) \cdot y_1''(x) + C_2'(x) \cdot y_2'(x) + \\ + C_2(x) \cdot y_2''(x) + p(x) \cdot C_1(x) \cdot y_1'(x) + \\ + p(x) \cdot C_2(x) \cdot y_2'(x) + g(x) \cdot C_1(x) \cdot y_1(x) + \\ + g(x) \cdot C_2(x) \cdot y_2(x) = f(x) \end{aligned}$$

Перегруппируем слагаемые с $C_1(x)$ и $C_2(x)$:



$$\begin{aligned} & C_1(x) \cdot \left(y_1''(x) + p(x) \cdot y_1'(x) + g(x) \cdot y_1(x) \right) + \\ & + C_2(x) \cdot \left(y_2''(x) + p(x) \cdot y_2'(x) + g(x) \cdot y_2(x) \right) + \\ & + C_1'(x) \cdot y_1'(x) + C_2'(x) \cdot y_2'(x) = f(x) \end{aligned}$$

Так как $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – решения однородного уравнения (7), то выражения в скобках равны нулю, следовательно:



$$C_1'(x) \cdot y_1'(x) + C_2'(x) \cdot y_2'(x) = f(x)$$

Объединим его с равенством

$$C_1'(x) \cdot y_1(x) + C_2'(x) \cdot y_2(x) = 0$$

Получаем систему:

$$\begin{cases} C_1'(x) \cdot y_1'(x) + C_2'(x) \cdot y_2'(x) = f(x) \\ C_1'(x) \cdot y_1(x) + C_2'(x) \cdot y_2(x) = 0 \end{cases}$$



Определитель этой системы

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

есть определитель Вронского.

Поскольку $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – линейно независимы, то

$$W(x) \neq 0$$

и система будет иметь единственное решение

$$C_1'(x) = \varphi_1(x) \quad C_2'(x) = \varphi_2(x)$$



Интегрируем эти выражения, получим

$$C_1 = C_1(x) \quad C_2 = C_2(x)$$

Подставляем их в выражение

$$Y(x) = C_1(x) \cdot y_1(x) + C_2(x) \cdot y_2(x)$$

и получаем частное решение неоднородного уравнения.



ПРИМЕР.

Найти общее решение уравнения

$$y'' - 5y' + 6y = x$$



Решение:

Рассмотрим однородное уравнение:

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

Ранее было показано, что его общее решение

$$\tilde{y} = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^{3x}$$

Следовательно, частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде:

$$Y = C_1(x) \cdot e^{2x} + C_2(x) \cdot e^{3x}$$



$$Y' = C_1'(x) \cdot e^{2x} + C_1(x) \cdot 2e^{2x} + C_2'(x) \cdot e^{3x} + C_2(x) \cdot 3e^{3x}$$

Пусть

$$C_1'(x) \cdot e^{2x} + C_2'(x) \cdot e^{3x} = 0$$

Тогда

$$Y' = C_1(x) \cdot 2e^{2x} + C_2(x) \cdot 3e^{3x}$$

$$Y'' = C_1'(x) \cdot 2e^{2x} + C_1(x) \cdot 4e^{2x} + C_2'(x) \cdot 3e^{3x} + C_2(x) \cdot 9e^{3x}$$

Подставляем в уравнение:



$$\begin{aligned} & C_1'(x) \cdot 2e^{2x} + \cancel{4C_1(x) \cdot e^{2x}} + 3C_2'(x) \cdot e^{3x} + \\ & + \cancel{9C_2(x) \cdot e^{3x}} - \cancel{10C_1(x) \cdot e^{2x}} - \cancel{15C_2(x) \cdot e^{3x}} + \\ & + \cancel{6C_1(x) \cdot e^{2x}} + \cancel{6C_2(x) \cdot e^{3x}} = x \end{aligned}$$

Получаем:

$$\begin{cases} C_1'(x) \cdot e^{2x} + C_2'(x) \cdot e^{3x} = 0 \\ 2C_1'(x) \cdot e^{2x} + 3C_2'(x) \cdot e^{3x} = x \end{cases}$$



Первое уравнение умножаем на 2 и вычтем его из второго:

$$3C_2'(x) \cdot e^{3x} - 2C_2'(x) \cdot e^{3x} = x$$

$$C_2'(x) = x \cdot e^{-3x}$$

Теперь подставляем в первое уравнение:

$$C_1'(x) \cdot e^{2x} + x \cdot e^{-3x} \cdot e^{3x} = 0$$

$$C_1'(x) = -x \cdot e^{-2x}$$



Интегрируем эти выражения:

$$\begin{aligned} C_1(x) &= -\int x \cdot e^{-2x} dx = \left| \begin{array}{l} x = u \quad dx = du \\ e^{-2x} dx = dv \quad v = -\frac{1}{2} e^{-2x} \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{2} x \cdot e^{-2x} - \frac{1}{2} \int e^{-2x} dx = \frac{1}{2} x \cdot e^{-2x} + \frac{1}{4} e^{-2x} = \\ &= \frac{1}{2} e^{-2x} \left(x + \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} C_2(x) &= \int x \cdot e^{-3x} dx = \left| \begin{array}{l} x = u \quad dx = du \\ e^{-3x} dx = dv \quad v = -\frac{1}{3} e^{-3x} \end{array} \right| = \\ &= -\frac{1}{3} x \cdot e^{-3x} + \frac{1}{3} \int e^{-3x} dx = -\frac{1}{3} x \cdot e^{-3x} - \frac{1}{9} e^{-3x} = \\ &= -\frac{1}{3} e^{-3x} \left(x + \frac{1}{3} \right) \end{aligned}$$

При интегрировании можно опустить произвольные постоянные т.к. мы ищем любое частное решение уравнения. Частное решение неоднородного уравнения имеет вид:



$$\begin{aligned} Y &= \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \right) \cdot e^{-2x} \cdot e^{2x} - \frac{1}{3} \left(x + \frac{1}{3} \right) \cdot e^{-3x} \cdot e^{3x} = \\ &= \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{3} \left(x + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{6} \left(x + \frac{5}{6} \right) \end{aligned}$$

Складываем это частное решение и общее решение однородного уравнения, получаем общее решение исходного неоднородного уравнения:

$$y = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^{3x} + \frac{1}{6} \left(x + \frac{5}{6} \right)$$