21.8. ЛИНЕЙНЫЕ ДУ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Рассмотрим случай, когда в уравнении

$$y'' + p(x) \cdot y' + g(x) \cdot y = f(x)$$

функции *p(x)* и *g(x)* – постоянные величины.

Уравнение вида

$$y'' + p \cdot y' + g \cdot y = f(x)$$

называется линейным ДУ с постоянными коэффициентами

Где y – искомая функция, p, g – постоянные величины.

Если $f(x)=0$, то уравнение называется линейным однородным.

Если $f(x)$ не равно 0, то уравнение называется линейным неоднородным.

Рассмотрим сначала однородное уравнение:

$$y'' + p \cdot y' + g \cdot y = 0 \qquad (10)$$

Будем искать решение этого уравнения в виде

$$y = e^{kx}$$

Где *k* - некоторое число.

Находим производные и подставляем в исходное уравнение:

$$y' = k \cdot e^{kx} \qquad y'' = k^2 \cdot e^{kx}$$

$$k^2 \cdot e^{kx} + p \cdot k \cdot e^{kx} + g \cdot e^{kx} = 0$$

$$\boxed{k^2 + p \cdot k + g = 0}$$

Это уравнение называется *характеристическим уравнением* для уравнения (10).

Вид решения линейного однородного ДУ (10) существенно зависит от того, какие корни имеет его характеристическое уравнение.

Обозначим эти корни как k_1 и k_2.

ТЕОРЕМА.

Если корни характеристического уравнения вещественные и разные

$$k_1 \neq k_2$$

то общее решение однородного уравнения (9) имеет вид:

$$\boxed{y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}}$$

Если корни характеристического уравнения вещественные и равные

$$k_1 = k_2 = k$$

то общее решение однородного уравнения (10) имеет вид:

$$\boxed{y = C_1 e^{kx} + C_2 \cdot x \cdot e^{kx}}$$

Если характеристическое уравнение не имеет вещественных корней, то общее решение однородного уравнения (10) имеет вид:

$$\boxed{y = C_1 e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x}$$

где

$$k_1 = \alpha + i \cdot \beta$$

$$k_2 = \alpha - i \cdot \beta$$

-комплексные корни характеристического уравнения.

ПРИМЕРЫ.

1

Решить дифференциальное уравнение:

$$y'' - 5y' + 4y = 0$$

Решение:

$$y = e^{kx} \quad \Rightarrow \quad k^2 - 5k + 4 = 0$$

$$D = 25 - 16 = 9 \quad \Rightarrow \quad k_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{2}$$

$$k_1 = 4$$

$$k_2 = 1$$

Корни вещественные и разные, поэтому общее решение будет иметь вид:

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{4x}$$

2

Решить дифференциальное уравнение:

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

Решение:

$$y = e^{kx} \quad \Rightarrow \quad k^2 - 6k + 9 = 0$$

$$D = 36 - 36 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_{1,2} = \frac{6}{2} = 3 = k$$

Корни вещественные и одинаковые, поэтому общее решение будет иметь вид:

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 \cdot x \cdot e^{3x}$$

3

Решить дифференциальное уравнение:

$$y'' - 2y' + 2y = 0$$

Решение:

$$y = e^{kx} \quad \Rightarrow \quad k^2 - 2k + 2 = 0$$

$$D = 4 - 8 = -4 \quad \Rightarrow \quad k_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = 1 \pm i$$

$$k_1 = 1 + i$$

$$k_2 = 1 - i$$

Корни комплексные, поэтому общее решение будет иметь вид:

$$y = C_1 e^x \cdot \cos x + C_2 e^x \cdot \sin x$$

Теперь рассмотрим решение неоднородного ЛДУ с постоянными коэффициентами (9).

Общее решение неоднородного ЛДУ с постоянными коэффициентами находится как сумма общего решения однородного уравнения и какого-либо частного решения неоднородного уравнения.

ПРИМЕР.

Решить дифференциальное уравнение:

$$y'' - 3y' + 2y = e^x$$

Решение:

Сначала находим общее решение однородного уравнения:

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

$$y = e^{kx} \quad \Rightarrow \quad k^2 - 3k + 2 = 0$$

$$D = 9 - 8 = 1 \quad \Rightarrow \quad k_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

$$k_1 = 2$$

$$k_2 = 1$$

Корни вещественные и разные, поэтому общее решение будет иметь вид:

$$\tilde{y}(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{x}$$

Теперь находим частное решение неоднородного уравнения методом вариации постоянных в виде:

$$Y(x) = C_1(x) \cdot e^{2x} + C_2(x) \cdot e^{x}$$

$$Y'(x) = C_1'(x) \cdot e^{2x} + C_1(x) \cdot 2 \cdot e^{2x} +$$

$$+ C_2'(x) \cdot e^{x} + C_2(x) \cdot e^{x}$$

Пусть

$$C_1'(x)\cdot e^{2x}+C_2'(x)\cdot e^{x}=0$$

Тогда

$$Y'(x)=C_1(x)\cdot 2e^{2x}+C_2(x)\cdot e^{x}$$

$$Y''=C_1'(x)\cdot 2e^{2x}+C_1(x)\cdot 4e^{2x}+$$

$$+C_2'(x)\cdot e^{x}+C_2(x)\cdot e^{x}$$

Подставляем в уравнение:

$$C_1'(x)\cdot 2e^{2x}+\cancel{4C_1(x)\cdot e^{2x}}+C_2'(x)\cdot e^{x}+$$

$$+\cancel{C_2(x)\cdot e^{x}}-\cancel{6C_1(x)\cdot e^{2x}}-3\cancel{C_2(x)\cdot e^{x}}+$$

$$+\cancel{2C_1(x)\cdot e^{2x}}+\cancel{2C_2(x)\cdot e^{x}}=e^{x}$$

Получаем:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cdot e^{2x}+C_2'(x)\cdot e^{x}=0 \\ 2C_1'(x)\cdot e^{2x}+C_2'(x)\cdot e^{x}=e^{x} \end{cases}$$

Вычитаем из второго уравнения первое:

$$C_2'(x)\cdot e^{2x} = e^{x}$$

$$C_2'(x) = e^{-x}$$

Теперь подставляем в первое уравнение:

$$C_1'(x)\cdot e^{x} + e^{-x}\cdot e^{2x} = 0$$

$$C_1'(x) = -e^{-x}\cdot e^{x} = 1$$

Интегрируем эти выражения:

$$C_1(x) = -\int dx = -x$$

$$C_2(x) = \int e^{-x} dx = -e^{-x}$$

Частное решение неоднородного уравнения имеет вид:

$$Y = -xe^{x} - e^{-x} \cdot e^{2x} = -xe^{x} - e^{x}$$

Общее решение будет:

$$y = C_1 \cdot e^{x} + C_2 \cdot e^{2x} - x \cdot e^{x} - e^{x}$$

Частное решение неоднородного уравнения можно найти, используя следующую схему:

1

Пусть правая часть уравнения (9) имеет вид:

$$f(x) = P(x) \cdot e^{mx}$$

где *P(x)* – многочлен.

Тогда частное решение неоднородного уравнения (9) будет иметь вид:

$$y(x) = x^r \cdot Q(x) \cdot e^{mx}$$

где *Q(x)* – многочлен той же степени, что и *P(x)*.

Причем, если *m* не является корнем характеристического уравнения, то

$$r=0,$$

а если является, то *r* – кратность этого корня.

ПРИМЕР.

Решить дифференциальное уравнение:

$$y'' - 2y' + y = 1 + x$$

Решение:

Сначала решаем однородное уравнение:

$$y'' - 2y' + y = 0$$

$$y = e^{kx} \quad \Rightarrow \quad k^2 - 2k + 1 = 0$$

$$D = 4 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_{1,2} = \frac{2}{2} = 1 = k$$

Корни вещественные и одинаковые, поэтому общее решение однородного уравнения будет иметь вид:

$$\tilde{y}(x) = C_1 e^x + C_2 \cdot x \cdot e^x$$

Теперь решаем неоднородное уравнение. Правая часть представляет собой рассмотренный случай:

$$P(x) = 1 + x$$

$$m = 0$$

m **– не является корнем характеристического уравнения, следовательно r=0. Поэтому частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде:**

$$Y(x) = A \cdot x + B$$

Находим производные и подставляем в исходное уравнение:

$$Y'(x) = A$$

$$Y''(x) = 0$$

$$-2A + Ax + B = 1 + x$$

$$A = 1$$

$$B = 3$$

Частное решение неоднородного уравнения имеет вид:

$$Y(x) = x + 3$$

Общее решение неоднородного уравнения запишем как сумму общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения:

$$y = C_1 e^x + C_2 \cdot x \cdot e^x + x + 3$$

2

Пусть правая часть уравнения (9) имеет вид:

$$f(x) = a\cos nx + b\sin nx$$

Если числа $\pm in$

не являются корнями характеристического уравнения, то частное решение неоднородного уравнения (9) будет иметь вид:

$$\boxed{y = A\cos nx + B\sin nx}$$

Если числа $\pm in$

являются корнями характеристического уравнения, то частное решение будет иметь вид:

$$\boxed{y = x \cdot \left(A\cos nx + B\sin nx\right)}$$

ПРИМЕР.

Решить дифференциальное уравнение:

$$y'' + 4y' + 13y = 5\sin 2x$$

Решение:

Сначала решаем однородное уравнение:

$$y'' + 4y' + 13y = 0$$

$$y = e^{kx} \quad \Rightarrow \quad k^2 + 4k + 13 = 0$$

$$D = 16 - 52 = -36 \quad \Rightarrow \quad k_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = 2 \pm 3i$$

$$k_1 = 2 + 3i$$

$$k_2 = 2 - 3i$$

Корни комплексные, поэтому общее решение будет иметь вид:

$$\tilde{y}(x) = e^{-2x} \cdot (C_1 \cdot \sin 3x + C_2 \cdot \cos 3x)$$

Теперь решаем неоднородное уравнение. Правая часть представляет собой рассмотренный случай:

$$n = 2$$

2i **и** ***–2i*** **не являются корнями характеристического уравнения, следовательно частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде:**

$$Y(x) = A\cos 2x + B\sin 2x$$

Находим производные и подставляем в исходное уравнение:

$$Y'(x) = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x$$

$$Y''(x) = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x$$

$$-4A\cos 2x - 4B\sin 2x - 8A\sin 2x + 8B\cos 2x +$$

$$+13A\cos 2x + 13B\sin 2x = 5\sin 2x$$

$$\begin{cases} -4B - 8A + 13B = 5 \\ -4A + 8B + 13A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{8}{29} \\ B = \dfrac{9}{29} \end{cases}$$

Частное решение неоднородного уравнения имеет вид:

$$Y(x) = -\frac{8}{29}\cos 2x + \frac{9}{29}\sin 2x$$

Общее решение неоднородного уравнения запишем как сумму общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения:

$$y = e^{-2x}(C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x) - \frac{8}{29}\cos 2x + \frac{9}{29}\sin 2x$$

3

Пусть правая часть уравнения (9) имеет вид:

$$f(x) = e^{mx}(P_1(x)\cos nx + P_2(x)\sin nx)$$

где *$P_1(x)$* и *$P_2(x)$* – многочлены.

Если числа $m \pm in$

не являются корнями характеристического уравнения, то частное решение неоднородного уравнения (9) будет иметь вид:

$$\boxed{y = e^{mx}\left(R_1(x)\cos nx + R_2(x)\sin nx\right)}$$

Если числа $m \pm in$

являются корнями характеристического уравнения, то частное решение будет иметь вид:

$$\boxed{y = x \cdot e^{mx}\left(R_1(x)\cos nx + R_2(x)\sin nx\right)}$$

где $R_1(x)$ и $R_2(x)$ – многочлены той же степени, что и многочлены $P_1(x)$ и $P_2(x)$.