22.3. ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

На некотором множестве точек, изображающих значения комплексного переменного z задана функция

$$\omega = f(z)$$

если каждой точке z этого множества поставлено в соответствие одно или несколько значений ω.

Если каждой точке z соответствует одно значение ω, то функция

$$\omega = f(z)$$

называется однозначной.

Если каждой точке z соответствует несколько значений ω, то функция

$$\omega = f(z)$$

называется многозначной.

Пример.

1 **Функция**

$$\omega = z^2$$

-однозначна.

Ее можно считать определенной на всей плоскости, т.к. по формуле введения комплексного числа в степень, любому комплексному числу z ставится в соответствие одно значение z^2.

2

Функция

$$\omega = Argz$$

-многозначна.

Она определена с точностью до 2П и определена на всей плоскости, кроме точки z=0 (при z=0 Argz не имеет смысла).

Поскольку задание комплексного числа равносильно заданию двух действительных чисел x и y: $z = x + i \cdot y$

то числу ω тоже однозначно соответствует пара действительных чисел u и v: $\omega = u + i \cdot v$

Поэтому зависимость $\omega = f(z)$

между комплексной функцией ω и комплексным аргументом z равносильна зависимости:

$$u = u(x, y)$$

$$v = v(x, y)$$

определяющей действительные величины u и v как функции действительных аргументов x и y.

Пример.

Задана функция

$$\omega = z^2$$

При

$$z = x + i \cdot y \qquad \omega = u + i \cdot v$$

имеем:

$$z^2 = (x + i \cdot y)^2 = x^2 - y^2 + 2i \cdot x \cdot y = u + i \cdot v$$

$$\Rightarrow \quad u = x^2 - y^2$$

$$v = 2x \cdot y$$

Если значения аргумента z изображать точками на плоскости Z, а значения функции ω – точками на плоскости W, то функция $\omega = f(z)$ устанавливает зависимость между точками плоскости Z, в которых эта функция определена, и точками плоскости W.

Таким образом устанавливается отображение точек плоскости Z на соответствующие точки плоскости W.

Пусть g – множество точек плоскости Z, на которых определена функция $\omega = f(z)$

а G – множество точек плоскости W, на которое отображаются точки функции $\omega = f(z)$

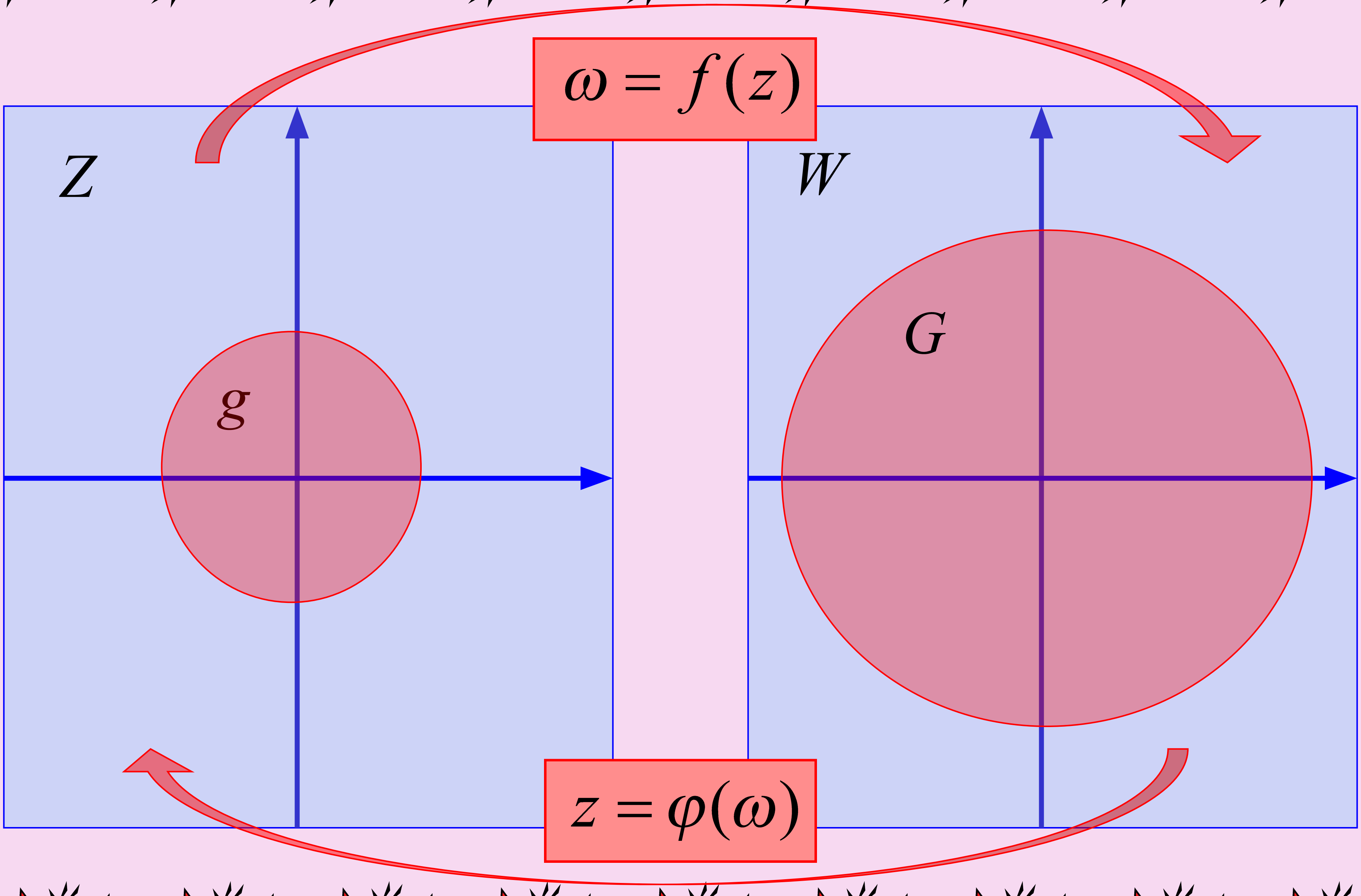
Каждой точке множества G будет соответствовать одна или несколько точек множества g. Это будет означать, что на множестве G определена некоторая функция $z = \varphi(\omega)$

Эта функция будет обратной к функции $\omega = f(z)$

Если функция $\omega = f(z)$

однозначна., то и обратная к ней функция будет однозначной, если отображение $g \to G$

взаимно однозначно.



$\omega = f(z)$
Z
W
g
G
$z = \varphi(\omega)$

Пример.

Функция $\omega = z^2$

отображает круг g плоскости Z с радиусом 2 на круг G плоскости ω с радиусом 4.

Это отображение однозначно, но не взаимно однозначно, поскольку функция $\omega = z^2$

- однозначна, и каждой точке плоскости Z соответствует одна точка плоскости ω.

Но каждой точке плоскости ω, соответствуют две точки плоскости Z, следовательно функция $z = \sqrt{\omega}$

осуществляющая отображение области G в g – двузначна.

Если в плоскости Z кривая C задана уравнением

$$F(x, y) = 0$$

то чтобы найти уравнение кривой в плоскости ω, на которую отображается кривая C, нужно исключить *x* и *y* из уравнений

$$u = u(x, y)$$

$$v = v(x, y)$$

Если кривая C задана параметрически:

$$x = x(t)$$
$$y = y(t)$$

то подставляя эти выражения вместо *x* и *y* , получим:

$$u = u(x(t), y(t)) = \varphi_1(t)$$

$$v = v(x(t), y(t)) = \varphi_2(t)$$

Пример.

Найти образ прямой

$$z = (1+i)\cdot t$$

при отображении

$$\omega = z^3$$

Решение.

Уравнение

$$z = (1+i)\cdot t$$

равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}$$

следовательно

$x = y$ - биссектриса 1-го координатного угла

С помощью функции $\omega = z^3$

эта прямая отображается на линию

$$\omega = (1+i)^3 \cdot t^3$$

$$(1+i)^3 = (1+i)\cdot(1-1+2\cdot i) = 2\cdot i - 2$$

$$\omega = (2\cdot i - 2)\cdot t^3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u = -2t^3 \\ v = 2t^3 \end{cases} \Rightarrow u = -v$$

- биссектриса 2-го координатного угла