



22.4. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

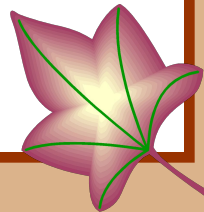
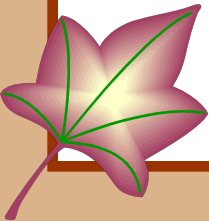
Ряд с комплексными членами

$$z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots \quad \boxed{1}$$

*называется сходящимся, если
существует конечный предел
последовательности его частичных*

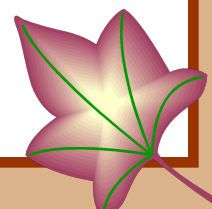
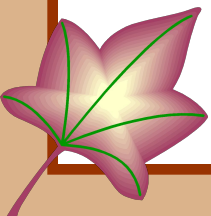
сумм:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$$





Число S называется суммой ряда:

$$z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots = S$$




*Ряд (1) сходится тогда и только тогда,
когда сходится ряд*

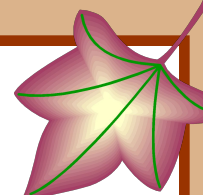
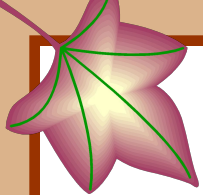
$$x_1 + x_2 + \dots + x_n + \dots$$

*составленный из действительных
частей членов ряда (1), и ряд*

$$y_1 + y_2 + \dots + y_n + \dots$$

*составленный из мнимых частей
членов ряда (1).*





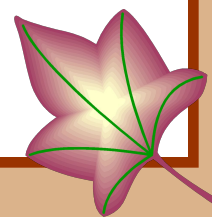
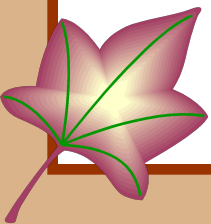
Таким образом, из сходимости последовательности комплексных чисел следует сходимость двух последовательностей, одна из которых состоит из действительных, а другая – из мнимых частей комплексной последовательности.

Если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$$



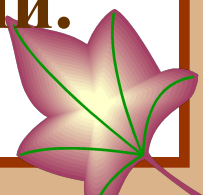
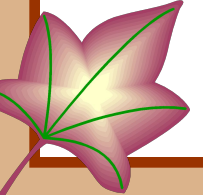


Ряд (1) сходится абсолютно, если сходится ряд

$$|z_1| + |z_2| + \dots + |z_n| + \dots$$

$$\begin{array}{l} |x_n| \leq |z_n| \\ |y_n| \leq |z_n| \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| + \dots \\ |y_1| + |y_2| + \dots + |y_n| + \dots \end{array} \quad \text{— сходятся}$$

Определение суммы, разности, произведения рядов с комплексными членами такие же, как и для рядов с действительными членами.





1. Показательная и тригонометрические функции

Когда показатель степени является комплексным числом, определение степени

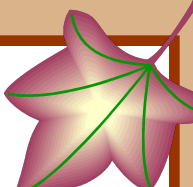
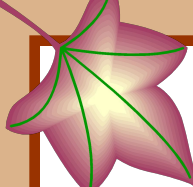
$$a^z$$

вводимое в алгебре, теряет смысл. Аналогично, известные из тригонометрии функции

$$\sin z, \cos z, \operatorname{tg} z, \operatorname{ctg} z$$

теряют смысл при комплексном аргументе z .



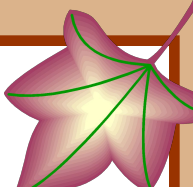
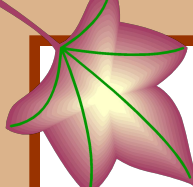


Воспользуемся известными разложениями в ряд функций действительного аргумента

$$e^x, \sin x, \cos x$$

и определим их для комплексного аргумента:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

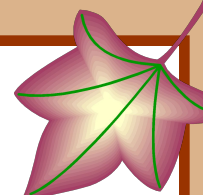
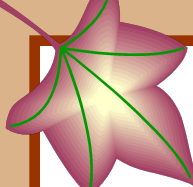

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots + (-1)^n \cdot \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

3

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots + (-1)^n \cdot \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

4

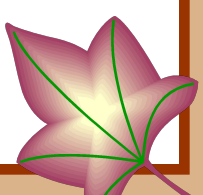
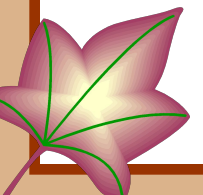




Ряды, стоящие в правой части равенств, сходятся, и притом абсолютно, при любом комплексном значении z . Поэтому эти равенства определяют функции

$$e^z, \sin z, \cos z$$

во всей плоскости комплексного переменного. При действительных значениях z эти функции будут совпадать с функциями, определенными ранее в курсе математического анализа.





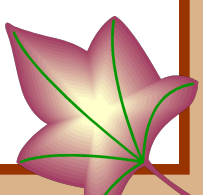
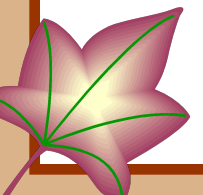
Найдем связь между этими функциями.

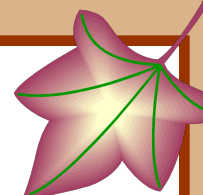
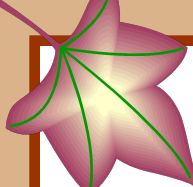
Подставим в разложение (2) вместо z величину iz .

$$e^{iz} = 1 + i \cdot z - \frac{z^2}{2!} - \frac{i \cdot z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{i \cdot z^5}{5!} + \dots$$

5

Умножим почленно равенство (3) на i :

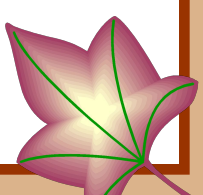
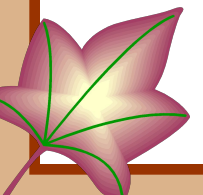
$$i \cdot \sin z = i \cdot z - \frac{i \cdot z^3}{3!} + \frac{i \cdot z^5}{5!} - \dots$$




Складываем почленно полученное равенство с равенством (2):

$$\cos z + i \cdot \sin z = 1 + i \cdot z - \frac{z^2}{2!} - \frac{i \cdot z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{i \cdot z^5}{5!} + \dots$$

Правые части этого равенства и равенства (5) равны, следовательно можно приравнять их левые части:




$$e^{iz} = \cos z + i \cdot \sin z$$

формула Эйлера





Если в формуле Эйлера заменить z на $-z$, то

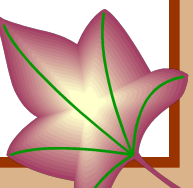
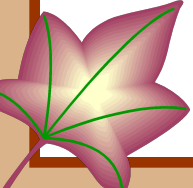
$$e^{-iz} = \cos z - i \cdot \sin z$$

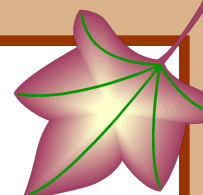
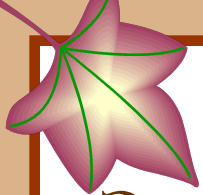
Складывая и вычитая почленно последние два равенства, получаем:

$$e^{iz} + e^{-iz} = \cos z + i \cdot \sin z + \cos z - i \cdot \sin z = 2 \cos z$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$e^{iz} - e^{-iz} = \cos z + i \cdot \sin z - \cos z + i \cdot \sin z = 2i \cdot \sin z$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2 \cdot i}$$




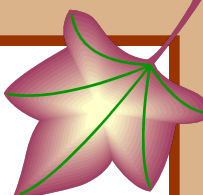
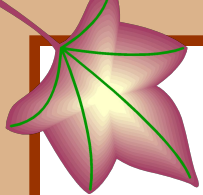
Эти формулы позволяют вычислять значения тригонометрических функций с комплексным аргументом.

С помощью формулы Эйлера можно перейти от тригонометрической формы комплексного числа к показательной:

$$e^{iz} = r \cdot e^{i\varphi}$$

*показательная форма
комплексного числа*





Получим выражение, позволяющее вычислять значения показательной функции при любом комплексном значении показателя.

Т.к.

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$$

то

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$$

По формуле Эйлера

$$e^{iy} = \cos y + i \cdot \sin y$$

следовательно




$$e^z = e^x \cdot (\cos y + i \cdot \sin y)$$

Тогда

$$|e^z| = e^x$$

и одно из значений аргумента равно y :

$$\operatorname{Arg} e^z = y$$


Пример.

Вычислить

1

$$e^{2-3i}$$

2

$$e^{\pi i}$$

3

$$e^{\frac{\pi}{2}i}$$

4

$$\sin(1 + 2 \cdot i)$$

Решение.

1 $e^{2-3i} = e^2 \cdot (\cos 3 - i \cdot \sin 3)$

2 $e^{\pi i} = e^0 \cdot (\cos \pi - i \cdot \sin \pi) = -1$

3 $e^{\frac{\pi}{2}i} = e^0 \cdot (\cos \frac{\pi}{2} + i \cdot \sin \frac{\pi}{2}) = i$

4

$$\begin{aligned}\sin(1 + 2 \cdot i) &= \frac{e^{i-2} - e^{2-i}}{2i} = \frac{e^{-2} \cdot e^i - e^2 \cdot e^{-i}}{2i} = \\ &= \frac{e^{-2} \cdot (\cos 1 + i \sin 1) - e^2 \cdot (\cos 1 - i \sin 1)}{2i} = \\ &= \frac{\cos 1 \cdot (e^{-2} - e^2) + i \sin 1 \cdot (e^{-2} + e^2)}{2i} = \\ &= \frac{e^{-2} + e^2}{2} \sin 1 + i \cdot \frac{e^2 - e^{-2}}{2} \cos 1\end{aligned}$$



Из равенства

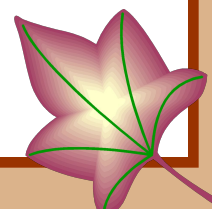
$$e^z = e^x \cdot (\cos y + i \cdot \sin y)$$

следует периодичность функции e^z

с периодом $2\pi i$:

$$z = x + i \cdot y$$

$$\begin{aligned} e^{z+2\pi i} &= e^{x+i(y+2\pi)} = \\ &= e^x \cdot (\cos(y + 2\pi) + i \cdot \sin(y + 2\pi)) = \\ &= e^x \cdot (\cos y + i \cdot \sin y) = e^z \end{aligned}$$





В частности:

$$e^{2k\pi i} = e^0 \cdot (\cos 2k\pi - i \cdot \sin 2k\pi) = e^0 = 1$$

$$e^{(2k+1)\pi i} = e^0 \cdot (\cos(2k+1) \cdot \pi - i \cdot \sin(2k+1) \cdot \pi) = -1$$

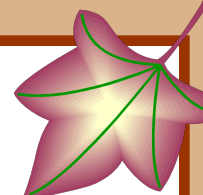
Поскольку показательная функция имеет период $2\pi i$, то и функции

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2 \cdot i}$$

тоже будут периодическими с периодом 2π :

$$\cos(z + 2\pi) = \cos z \quad \sin(z + 2\pi) = \sin z$$

Между тригонометрическими функциями сохраняются связывающие их тождества.

Поскольку функции $\sin z$ и $\cos z$ определены, можно задать функции $\operatorname{tg} z$ и $\operatorname{ctg} z$ для комплексного аргумента:

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i \cdot (e^{iz} + e^{-iz})}$$

$$\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{i \cdot (e^{iz} + e^{-iz})}{e^{iz} - e^{-iz}}$$
