# §7. Дисперсия дискретной случайной величины.

1. Отклонение случайной величины.

$\overset{\circ}{X} = X - E(X)$ -отклонение с. в. X от мат. ожидания.

2. Определение дисперсии.

Дисперсией с. в. X наз. число $D(X)=E(X-E(X))^2$.

Формула для вычисления дисперсии: $D(X)=E(X^2) -E^2(X)$ (*);

Док-во.

$a = E(X)$, $D(X)=E(X-a)^2 =E(X^2 -2aX+a^2)= E(X^2)-2aE(X)+a^2 =$

$=E(X^2)-2a^2 +a^2 = E(X^2)-a^2 = E(X^2) -E^2(X)$;

Пример.

3. Свойства дисперсии.

1) $D(X)\geq 0$;

2) $D(c)=0$;

3. $D(cX)=c^2 D(X)$;

- $D(cX)=E(c^2X^2) - (E(cX))^2 = c^2E(X^2) - (cE(X))^2 =$

  $=c^2 (E(X^2 )- E^2(X))=c^2 D(X)$;

4. Если с.в. Х и У **независимы,** то D(Х+У)= D(Х)+ D(У);

Док-во

$D(X+У)= E(X+У)^2 - E^2(X+У)= E(X^2 +2XУ+У^2) –(E (X)+E(У))^2$

$=E(X^2 ) +2E(XУ)+E(У^2) - E^2 (X) -2E(X)E(У)- E^2(У) =$

$= E(X^2 )- E^2 (X)+E(У^2) )- E^2(У) =D(X)+ D(У)$;

Следствие 1. Для попарно независимых с.в. $X_1,X_2,\ldots,X_к$

$$D(\sum_{l=1}^{k} X_l) = \sum_{l=1}^{k} D(X_l).$$

Следствие 2. Для любого числа **с** D(Х+с)= D(Х);

Следствие 3. Если с.в. Х и У **независимы**, то D(Х-У)=D(Х)+D (У);

$D(X-У)= D(X+(-У))= D(X)+D(-У)= D(X)+(-1)^2D(У) =D(X)+D (У)$.

*Пример*. С.в. Х и Y- независимы, D(Х)=2, D(У)=1. Найти дисперсию $Z = 2X - 4Y + 7$.

$D(Z) = D(2X - 4Y + 7)= D(2X)+ D(-4Y) + D(7) = 4D(X) + 16D(Y)=24$

## 4. Среднее квадратическое отклонение

Опр-е. Число $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$ наз. средним квадратическим отклонением.

$$D(X) = \sigma^2(X) = \sigma^2.$$

# Пример

- Закон распределения с.в. X имеет вид

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| X | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
| P | 0,2 | 0,3 | 0,3 | 0,1 | 0,1 |

Вычислить $\mathrm{E}(\mathrm{X}), D(X), \sigma(X), P\{X \leq 0\}, P\{|X| \geq 2\}$

a) $E(X) = -0{,}4 - 0{,}3 + 0 + 0{,}1 + 0{,}2 = -0{,}4;$

b) $D(X) = E(X^2)\text{-}E^2(X)$

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 4 |
| P | 0,3 | 0,4 | 0,3 |

$E(X^2)=0 + 0{,}4 + 1{,}2 = 1{,}6$

$D(X) = 1{,}6-(-0{,}4)^2=1{,}44;\ \sigma(X) = \sqrt{D(X)}=\sqrt{1{,}44}=1{,}2;$

c) $P\{X \leq 0\}=P\{X = -2\}+P\{X = -1\} + P\{X = 0\}=$
$= 0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}3 = 0{,}8$

# 5. Центрированная и нормированная случайная величина

a) центрирование $\overset{\boxtimes}{X} = X - E(X)$

b) Нормирование $Z = \dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ - стандартная с.в.

$$\mathrm{E}(Z) = 0; \qquad D(Z) = 1;$$

$$E(Z) = E\left(\frac{X - E(X)}{\sigma(X)}\right) = \frac{1}{\sigma(X)} E(X - E(X)) = 0;$$

$$D(Z) = D\left(\frac{X - E(X)}{\sigma(X)}\right) = \frac{1}{\sigma^2(X)} D(X - E(X)) = \frac{D(X)}{D(X)} = 1;$$

- $\overset{\circ}{X} = X - E(X)$ .

## § 8. Моменты случайной величины.

к=1,2,…

Опр.1. Моментом порядка *к* с.в. **Х** наз. число

$$\nu_{\kappa} = E(X^{\kappa}).$$

Опр.2. Центральным моментом порядка ***к*** с.в. **Х** наз. число

$$\mu_{k} = E(X - E(X))^{\kappa}.$$

*К=2*

$$\mu_{2} = E(X - E(X))^{2};$$

# II. Основные законы распределения д.с.в.

## §1. Биномиальный закон распределения.

1. Опр. С.в. **X** имеет биномиальное распределение с параметрами ***n*** и ***p***, если она принимает значения 0,1,…,n с вероятностями

$$P\{X = m\} = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad где \quad 0 < p < 1, \quad q = 1 - p, \quad m = 0,1,\dots,n.$$

| X | 0 | 1 | 2 | … | n |
|---|---|---|---|---|---|
| P{X=m} | $q^n$ | $C_n^1 p q^{n-1}$ | $C_n^2 p^2 q^{n-2}$ | | $p^n$ |

$$\sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m} = 1.$$

# § 2. Математическое ожидание и дисперсия с.в., распределенной по биномиальному закону.

<u>Теорема</u>. Пусть $X \in Bi(n, p).$

Тогда E(X)=$np$, D(X)=$npq$, где $q=1-p$.

$X$- число успехов в $n$ испытаниях Б. с вер. успеха $p$.

$$X_i = \begin{cases} 1, & если \quad в \quad i \quad испытании \quad наступил \quad успех, \\ 0, & если \quad в \quad i \quad испытании \quad наступила \quad неудача. \end{cases}$$

| $X_i$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| P | $q$ | $p$ |

$E(X_i)=0*q+1*p=p.$ Представим $X=X_1+X_2+\ldots+X_n$

$$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} p = np.$$

D(X)=?

$D(X_i)=E(X_i^2)-E^2(X_i)$,

| $X_i^2$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| P | *q* | *p* |

$E(X_i^2)=p;$

$D(X_i)=E(X_i^2)-E^2(X_i) = p-p^2 = p(1-p) = pq$

D(X)=?

$$D(X) = D(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i) = \sum_{i=1}^{n} pq = npq.$$

## Пример

- Вероятность приема самолетом радиосигнала при каждой передаче равна 0,7. Вычислить E(X) и D(X) числа сигналов, принятых при четырехкратной передаче. Каково наиболее вероятное значение числа принятых сигналов?

Считаем, прием самолетом радиосигнала при одной передаче – это У.

С.в. X- число успехов в 4-х испытаниях Б. с p=0,7.

X имеет биномиальное распределение с параметрами $n = 4, p = 0,7$.

$E(X) = np = 4 * 0,7 = 2,8$; $D(X) = npq = 4 * 0,7 * 0,3 =$0,64;

$(n + 1)p$=3,5 $m_0$=[3,5]=3;

# Пр.

- В Петербурге в течении трех дней наблюдается наводнение. Вероятность того, что в каждый из этих дней уровень воды в Неве превысит ординар равна 0,8.

Записать таблицу распределения числа дней с превышением ординара.

Вычислить м.о. и дисперсию числа дней с превышением ординара.

Решение.

n=3, p=0,8 q=0,2;

| X | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| P{X=m} | 0,008 | 0,096 | 0,384 | 0,512 |

E(X)=$np$=3*0,8=2,4; D(X)=$npq$=3*0,8*0,2=0,48;

(n+1)p=4*0,8=3,2; $m_0$=[3,2]=3;

.

$P\{X=0\}=q^3=0,008;$

$P\{X=1\}=C_3^{\,1}p\,q^2=3*0,8*0,2^2=0,096;$

$P\{X=2\}=C_3^{\,2}p^2\,q^1=3*0,8^2*0,2=0,384;$

$P\{X=3\}=p^3=0,512;$

$E(X)=np=3*0,8=2,4;$ $D(X)=npq=3*0,8*0,2=0,48;$

$(n+1)p=4*0,8=3,2;$ $m_0=[3,2]=3;$