О некоторых особенностях использования численных методов приближения функций

Янченко К.А.- АИМ103, Нигаматов Р.Ф.-АИМ101
Руководитель: Лукманов Р.Л.

Задача интерполяции

- Построить многочлен
- $L_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots a_n x^n$ (1)
- принимающий в заданных узлах заданные значения:

$$\begin{cases} L_n(x) = f(x_i) \\ i = 0,1\ldots n \end{cases} \qquad (2)$$

- Получается система линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$

Интерполяционные многочлены Лагранжа и Ньютона

1. **Интерполяционный многочлен Лагранжа** строится в виде:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i(x) f(x_i), \qquad \text{где} \quad c_i(x) = \frac{\prod_{k \neq i} (x - x_i)}{\prod_{k \neq i} (x_k - x_i)}$$

2. **Интерполяционный многочлен Ньютона** имеет вид:

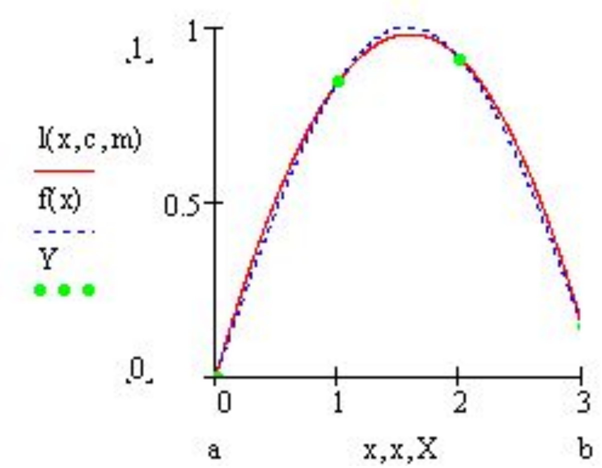
$$L_n(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots c_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$$

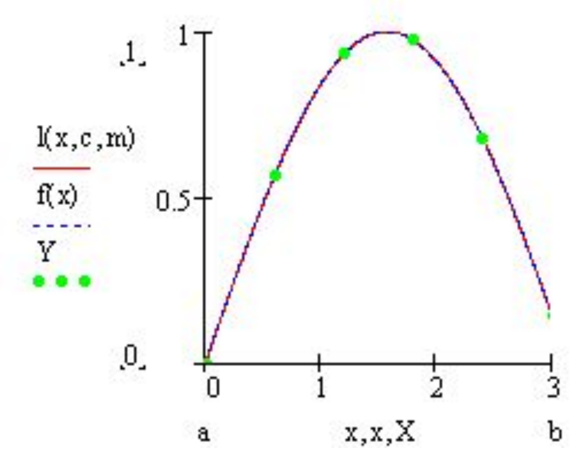
Коэффициенты $c_0, c_1, c_2, \ldots c_n$ могут быть найдены последовательно из условий интерполяции (2).

О погрешностях интерполяционных формул

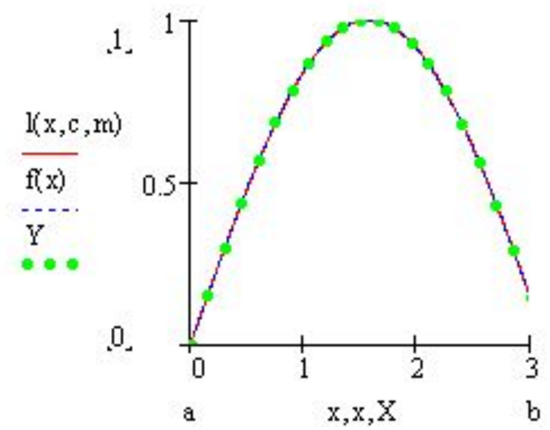
- $\left|f(x)-L_n(x)\right| \le \dfrac{M_{n+1}}{(n+1)!}\left|\omega(x)\right|$
- где $M_{n+1} = \sup\limits_{x\in[a,b]}\left|f^{(n+1)}(x)\right|$, $\omega(x)=\prod\limits_{i=0}^{n}(x-x_i)$
- Если $f(x)$ достаточно гладкая, то погрешность стремится к нулю с увеличением n:

Случай гладкой функции



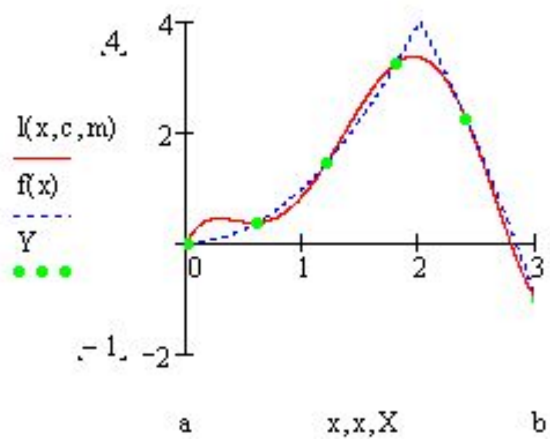


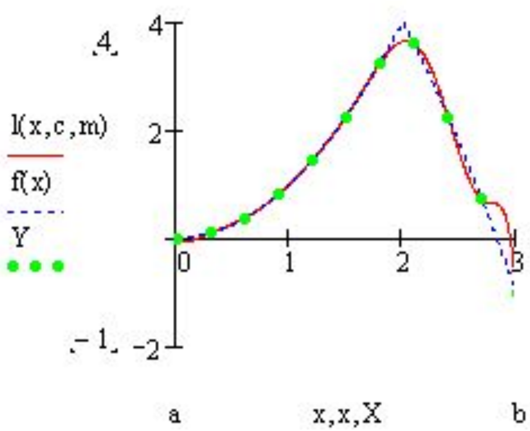
$$f(x) = \sin x$$

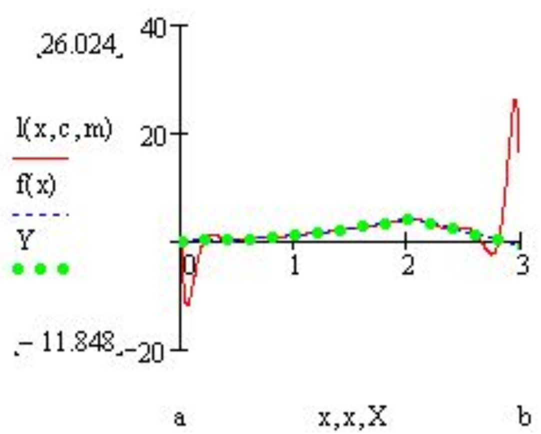


Случай негладкой функции

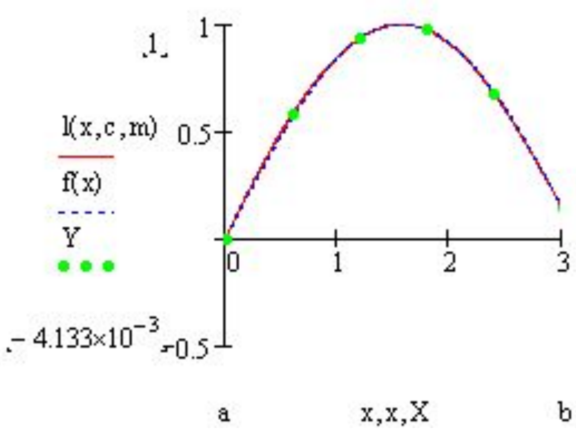
$$f(x) := \begin{cases} x^2 & \text{if } x < 2 \\ 8 - x^2 & \text{otherwise} \end{cases}$$

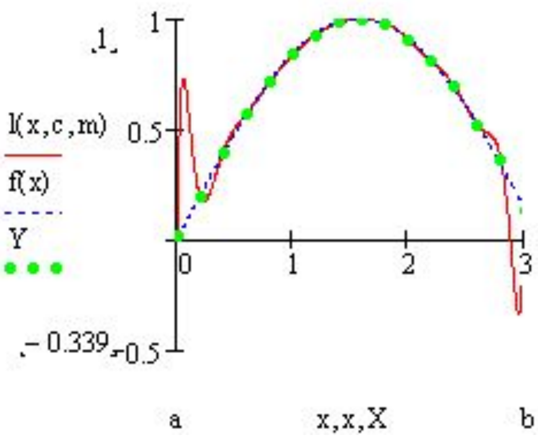






Наличие случайных погрешностей эксперимента





Вывод: при построении интерполяционных формул для данных, полученных экспериментально, из-за наличия даже небольших случайных погрешностей с увеличением числа узлов может сильно ухудшаться качество приближения.

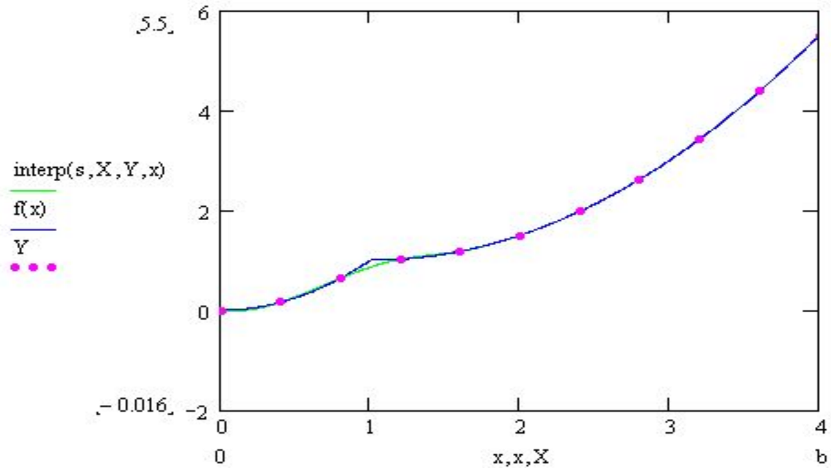
Сплайн-интерполяция

- На каждом промежутке $x_{i-1} \le x \le x_i$ $i = 1,2,\ldots,n$ строится многочлен третьей степени

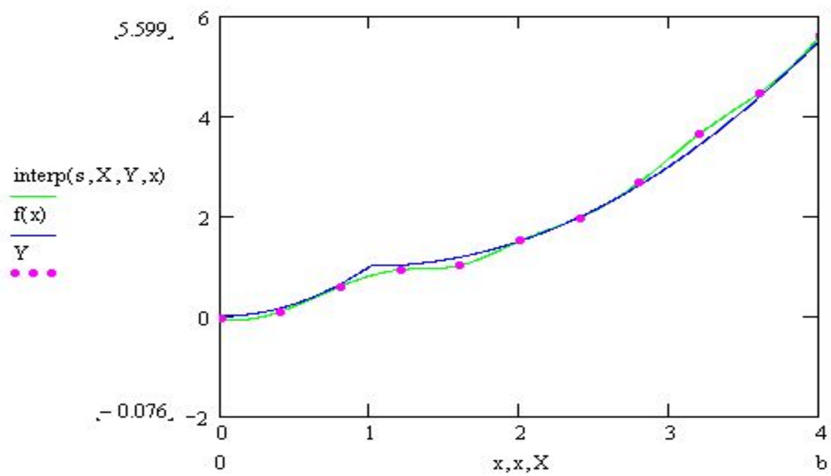
$$s_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + \frac{c_i}{2}(x - x_i)^2 + \frac{d_i}{6}(x - x_i)$$

коэффициенты которого находятся из условий интерполяции и условий непрерывности первой и второй производных. При этом получается система линейных уравнений с трехдиагональной матрицей, которая эффективно решается методом прогонки.

$$f(x) := \begin{cases} x^2 & \text{if } x < c \\ 0.5\cdot(x-c)^2 + c^2 & \text{otherwise} \end{cases}$$



Добавлены случайные отклонения



Выводы: 1) качество приближения может ухудшаться только в промежутках негладкости функции;
2) сплайн-интерполяция устойчива к случайным погрешностям измерения.

Метод наименьших квадратов

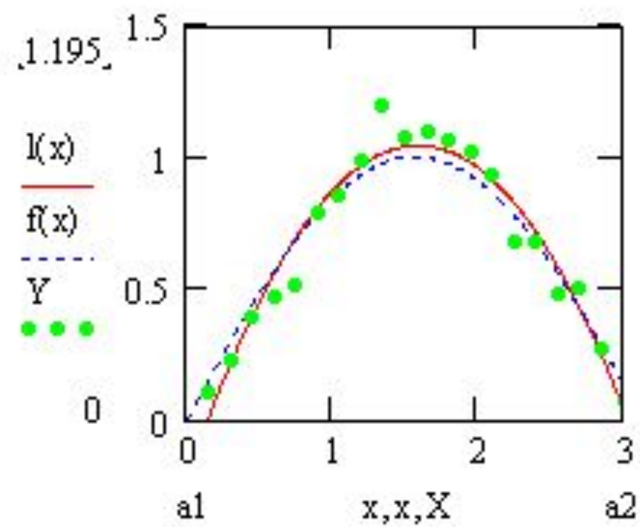
Задача: требуется приблизить функцию $y = f(x)$, заданную таблицей своих значений в точках $x_i, i = 1,2,...,n,$ в некотором классе функций $y = F(a_0, a_1, ..., a_m, x)$

Метод наименьших квадратов состоит в таком подборе параметров $a_0, a_1, ..., a_m,$ при котором сумма квадратов отклонений значений функции $F(a_0, a_1, ..., a_m, x)$ от y_i в точках x_i минимальна.

В качестве функции $F(a_0, a_1, ..., a_m, x)$ часто берут многочлены, причем невысокой степени. Например при m=2 МНК приводит к следующей системе линейных уравнений:

$$
\begin{cases}
a_0 n + a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + a_2 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{\,2} = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \\
a_0 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{\,2} + a_3 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{\,3} = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i x_i \\
a_0 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{\,2} + a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{\,3} + a_3 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{\,4} = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i x_i^{\,2}
\end{cases}
$$

Пример, иллюстрирующий устойчивость
метода наименьших квадратов
к случайным отклонениям.



Выводы

1. Не следует применять интерполяционные многочлены Лагранжа и Ньютона высокой степени (с большим количеством узлов) в случаях негладкой функции и при наличии даже небольших случайных ошибок измерения.
2. Сплайн-интерполяцию и метод наименьших квадратов можно использовать для большого количества узлов, в том числе в случаях негладкой функции и при наличии случайных ошибок измерения.