Вероятность

$$
\begin{aligned}
(a+b)^0 &= 1 \\
(a+b)^1 &= a + b \\
(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\
(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
(a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\
(a+b)^5 &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5
\end{aligned}
$$

Треугольник Паскаля

								1								
							1		1							
						1		2		1						
					1		3		3		1					
				1		4		6		4		1				
			1		5		10		10		5		1			
		1		6		15		20		15		6		1		
	1		7		21		35		35		21		7		1	
1		8		28		56		70		56		28		8		1

....

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$$

Определение 1. Произведение подряд идущих первых n натуральных чисел обозначают $n!$ и называют **«эн факториал»**: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n - 1) \cdot n$.

По-английски одно из значений слова «factor» — «множитель». Так что *«эн факториал»* примерно переводится как «состоящий из n множителей». Приведем несколько первых значений для $n!$:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$n!$	1	2	6	24	120	720	5040	40 320

Перестановки

- **Перестановки без повторений** – комбинаторные соединения, которые могут отличаться друг от друга лишь порядком входящих в них элементов.

$$P_n = n!$$

P – первая буква французского слова ***permutation*** – перестановка.

Размещения

(по первой букве французского слова ***arrangement*** – размещение)

$$A_n^k$$ Размещение из n элементов по k.

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Сочетания

Число сочетаний из n элементов по k.
(по первой букве французского слова ***Combination*** – сочетание).

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k}$$

Решение задач

1) $(y-1)^4 =$

2) $(2x-3)^5 =$

3) $\dfrac{7!-5!}{5!} =$

4) $\dfrac{97!}{96!} + \dfrac{35!}{34!} =$

5) $\dfrac{4!\cdot 8!}{6!\cdot 7!} =$

6) $\dfrac{(n+3)!}{(n+1)!} =$

Решение задач

7) $\dfrac{A_7^4}{P_5} =$

8) $\left(\dfrac{C_{10}^7}{3} + \dfrac{C_6^2}{6}\right) \cdot \dfrac{P_4}{A_5^4} =$

9) $\dfrac{1}{P_{x-5}} = \dfrac{56}{P_{x-3}}$

10) $C_7^0 + C_7^1 + C_7^2 + C_7^3 + C_7^4 + C_7^5 + C_7^6 + C_7^7 =$

достоверное событие

случайное событие

невозможное событие

несовместные события

равновозможные события

К какому типу событий (достоверному, невозможному, случайному) относится следующее событие:

1) при комнатной температуре и нормальном атмосферном давлении сталь находится в жидком состоянии;

2) наугад вынутая из кошелька монета оказалась пятирублевой;

3) наугад названное натуральное число больше нуля?

Классическое определение вероятности

Для нахождения вероятности случайного события A при проведении некоторого опыта следует:

1) *найти число N всех возможных исходов данного опыта;*

2) *найти количество N(A) тех исходов опыта, в которых наступает событие A;*

3) *найти частное* $\frac{N(A)}{N}$; *оно и будет равно вероятности события A.*

$$P(A) = \frac{N(A)}{N}$$

Задача 1. Какова вероятность выпадения четного числа очков при одном бросании игральной кости?

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

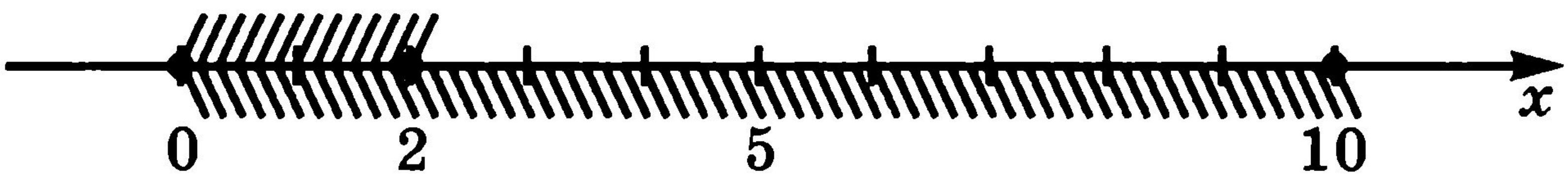
Задача 2. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков равна 6.

$$P(A) = \frac{5}{36}.$$

Задача 3.

Допустим, вы забыли последнюю цифру номера телефона друга и набрали ее наугад. Какова вероятность того, что вы ее верно набрали?

Пример 4. Случайным образом выбирают одно из решений неравенства $|x-5| \leqslant 5$. Какова вероятность того, что оно окажется и решением неравенства $|x-1| \leqslant 1$?



0,2.

5. В коробке находится 3 черных, 4 белых и 5 красных шаров. Наугад вынимается один шар. Какова вероятность того, что вынутый шар: 1) черный; 2) белый; 3) красный; 4) черный или белый; 5) черный или красный; 6) красный или белый; 7) черный, или белый, или красный; 8) зеленый?

6. Брошены 3 игральные кости. Какова вероятность того, что:
1) на всех трех костях выпало одинаковое количество очков;
2) сумма очков на всех костях равна 4;
3) сумма очков на всех костях равна 5?

7. В лотерее участвуют 15 билетов, среди которых 3 выигрышных. Наугад вынуты 2 билета. Какова вероятность того, что: 1) оба вынутых билета выигрышные; 2) только один выигрышный; 3) выигрышного билета не оказалось?

Вероятность противоположного события

Событие $\overline{A}$ *называется событием, противоположным событию A, если оно происходит, когда не происходит событие A.*

Что является событием, противоположным событию:
1) сегодня первый урок — физика;
2) экзамен сдан на «отлично»;
3) на игральной кости выпало меньше 5 очков;
4) хотя бы одна пуля при трех выстрелах попала в цель?

Вероятность противоположного события

Теорема 1. Сумма вероятностей противоположных событий равна 1.

$$P(A)+P(\bar{A})=1.$$

Задача 1. Вероятность попадания в мишень стрелком равна 0,6. Какова вероятность того, что он, выстрелив по мишени, промахнется?

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4.$$

З а д а ч а 2. В роте из 100 солдат двое имеют высшее образование. Какова вероятность того, что в случайным образом сформированном взводе из 30 солдат будет хотя бы один человек с высшим образованием?

$$P(\overline{A}) = \frac{C_{98}^{30}}{C_{100}^{30}} = \frac{\dfrac{98!}{30!\,68!}}{\dfrac{100!}{30!\,70!}} = \frac{98!\,70!}{68!\,100!} = \frac{69 \cdot 70}{99 \cdot 100} = \frac{161}{330}.$$

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{161}{330} = \frac{169}{330} \approx 0{,}512.$$

Случайные события и их вероятности

Определение. Суммой событий A и B называют событие, которое наступает в том и только том случае, когда происходит или событие A, или событие B. Обозначение: $A + B$.

Произведением событий A и B называют событие, которое наступает в том и только том случае, когда одновременно происходят и событие A, и событие B. Обозначение: AB.

Независимые события

События A и B называются независимыми, если выполняется равенство

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

ПРАВИЛО УМНОЖЕНИЯ

Для того чтобы найти число всех возможных исходов независимого проведения двух испытаний А и В, следует перемножить число всех исходов испытания А и число всех исходов испытания В.

Независимые события

З а д а ч а 1. Найти вероятность того, что при первом бросании игральной кости появятся 6 очков, а при втором — нечетное число очков.

$$P(AB)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{12}.$$

Вероятность попадания в мишень равна 0,6. Какова вероятность того, что стрелок попадет по мишени в каждом из двух последовательных выстрелов?

Вероятность того, что батарейка бракованная равна 0,06. Покупатель в магазине выбирает случайную упаковку, в которой две такие батарейки. Найдите вероятность того, что обе батарейки окажутся исправными.

$$1 - 0{,}06 = 0{,}94$$

$$0{,}94 \cdot 0{,}94 = 0{,}8836$$

Биатлонист пять раз стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,8. Найдите вероятность того, что биатлонист первые три раза попал в мишени, а последние два промахнулся. Результат округлите до сотых.

$$0{,}8\cdot 0{,}8\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2\cdot 0{,}2 = 0{,}02048$$

Сложение вероятностей

Суммой событий A и B называют событие A + B, состоящее в появлении либо только события A, либо только события B, либо и события A и события B одновременно.

Теорема. Вероятность появления одного из двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

В колоде 36 карт. Наугад вынимается одна карта. Какова вероятность, что эта карта либо туз, либо дама?

$$\frac{4}{36} + \frac{4}{36} =$$

Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,2, а для второго — 0,3. Какова вероятность того, что мишень будет поражена хотя бы одним выстрелом, если оба стрелка независимо друг от друга выстрелили по ней?

П1-*попал первый,* П2-*попал второй,*
М1-*мимо первый,* М2 – *мимо второй*

П1*и* М1 *или* П1*и*П2 *или* М1*и*П2

$$P = 0{,}2 \cdot 0{,}7 + 0{,}2 \cdot 0{,}3 + 0{,}8 \cdot 0{,}3 = 0{,}44$$

Теорема 2 (о вероятности суммы событий).

Вероятность суммы двух событий равна сумме вероятностей этих событий, уменьшенной на вероятность произведения этих событий:

$$\boxed{P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).}$$

В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. К концу дня в отдельно взятом автомате, кофе остается с вероятностью 0,8. Вероятность того, что кофе останется в обоих автоматах, равна 0,62. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе закончится в обоих автоматах.

$$P(\overline{A}) = 0{,}8 + 0{,}8 - 0{,}62 = 0{,}98$$

$$P(A) = 1 - 0{,}98 = 0{,}02$$

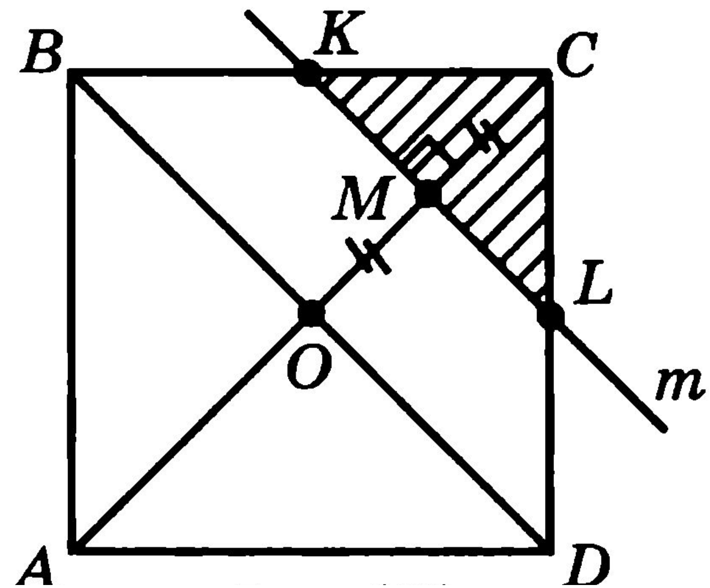
Вероятность и геометрия

Если площадь $S(A)$ фигуры A разделить на площадь $S(X)$ фигуры X, которая целиком содержит фигуру A, то получится вероятность того, что случайно выбранная точка фигуры X окажется в фигуре A:

$$P = \frac{S(A)}{S(X)}.$$

Пример 2. Графический редактор, установленный на компьютере, случайно отмечает одну точку на мониторе — квадрате $ABCD$. Какова вероятность того, что эта точка будет ближе к центру монитора, чем к вершине C?

Пример 2. Графический редактор, установленный на компьютере, случайно отмечает одну точку на мониторе — квадрате $ABCD$. Какова вероятность того, что эта точка будет ближе к центру монитора, чем к вершине C?



Решение.

Пусть a — длина стороны монитора.

Построим серединный перпендикуляр к отрезку OC.

вероятность выбора точки из ΔKCL равна $\frac{S_{KCL}}{S} = 0{,}125$.

По условию нам следует найти $1 - 0{,}125 = 0{,}875$.

***Ответ*: 0,875.**

Схема Бернулли

Теорема 1 (теорема Бернулли). ***Вероятность $P_n(k)$ наступления ровно k «успехов» в n независимых повторениях одного и того же испытания вычисляется по формуле***

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

где p — вероятность «успеха», а $q = 1 - p$ — вероятность «неудачи» в отдельном испытании.

О23.10. Стрелок не очень меток: вероятность поражения мишени при одном выстреле оценивается в 40%. Оцените (в процентах) вероятности наступления следующих событий при пяти выстрелах этого стрелка:

а) в мишень попадут ровно три пули;

б) в мишень не попадет ровно одна пуля;

в) мишень останется нетронутой;

г) мишень будет поражена хотя бы раз.

$$n = 5,\ p = 0{,}4,\ q = 0{,}6,\ k =$$

$$P_5(3) = C_5^3 p^3 q^2 = 10 \cdot 0{,}4^3 \cdot 0{,}6^2 \approx 0{,}23$$

$$P_5(1) =$$

$$P_5(0) = C_5^0 p^0 q^5 = 0{,}6^5 \approx 0{,}078$$

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

Статистические методы обработки информации

Измерение. У 50 выпускников школы независимо попросили назвать любую цифру. Получили следующие данные:

2	1	3	3	5	5	3	8	1	7
1	5	7	5	3	8	0	4	7	3
3	9	6	9	1	6	9	1	2	3
9	8	7	0	5	1	3	1	3	9
6	2	3	5	9	2	5	1	5	7

Таблица распределения

Варианты	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Всего: 10
Кратности	2	8	4	10	1	8	3	5	3	6	Сумма: 50

количество всех вариант

объем измерения

Статистические методы обработки информации

Если кратность данной варианты разделить на объем измерения, то получится *частота варианты*.

$$\textbf{Частота варианты} = \frac{\textit{кратность варианты}}{\textit{объем измерения}}$$

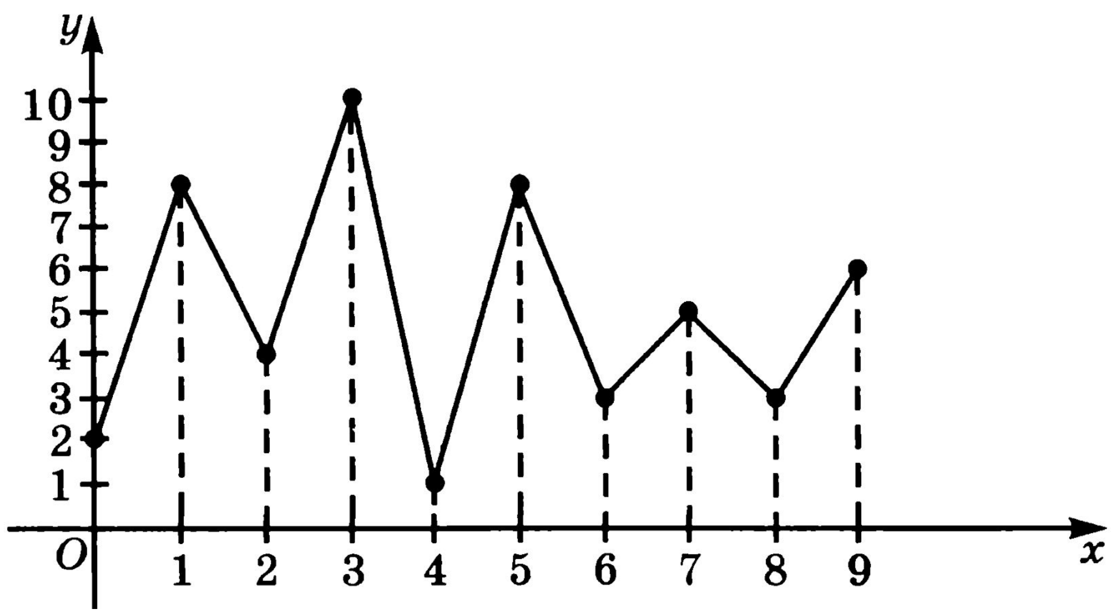
$$\textbf{Процентная частота варианты} = \frac{\textit{кратность варианты}}{\textit{объем измерения}} \cdot 100\%$$

Варианты	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Всего: 10
Кратности	2	8	4	10	1	8	3	5	3	6	Сумма: 50
Частоты	0,04	0,16	0,08	0,2	0,02	0,16	0,06	0,1	0,06	0,12	Сумма: 1
Частоты (%)	4	16	8	20	2	16	6	10	6	12	Сумма: 100

Статистические методы обработки информации

Варианты	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Всего: 10
Кратности	2	8	4	10	1	8	3	5	3	6	Сумма: 50
Частоты	0,04	0,16	0,08	0,2	0,02	0,16	0,06	0,1	0,06	0,12	Сумма: 1
Частоты (%)	4	16	8	20	2	16	6	10	6	12	Сумма: 100

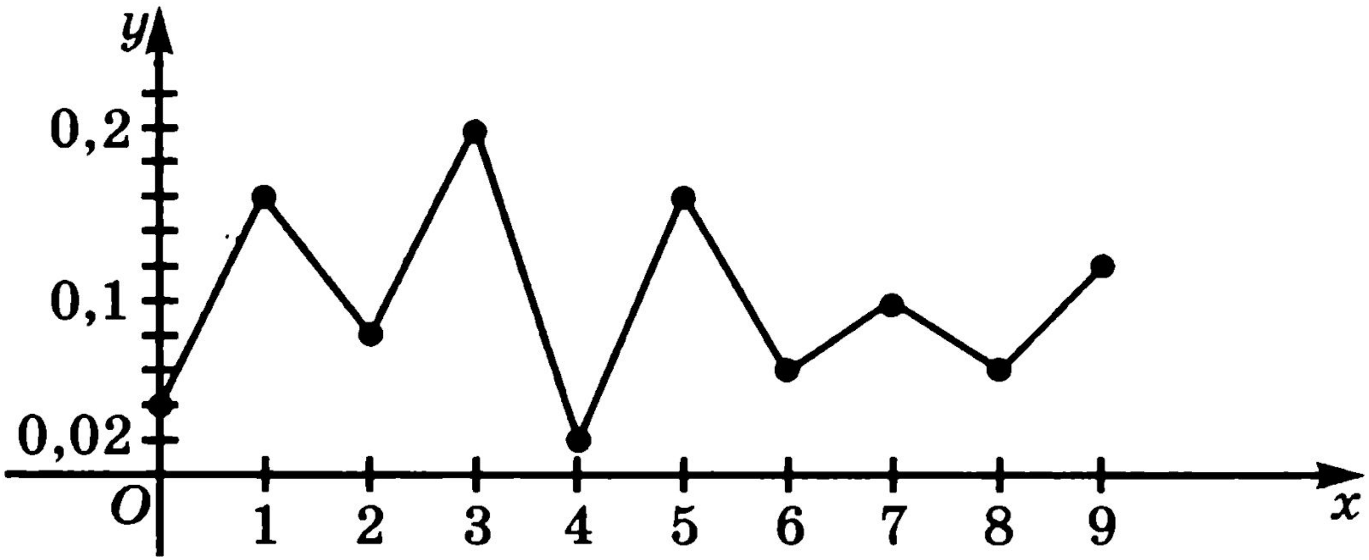
Многоугольник распределения кратностей



Статистические методы обработки информации

Варианты	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Всего: 10
Кратности	2	8	4	10	1	8	3	5	3	6	Сумма: 50
Частоты	0,04	0,16	0,08	0,2	0,02	0,16	0,06	0,1	0,06	0,12	Сумма: 1
Частоты (%)	4	16	8	20	2	16	6	10	6	12	Сумма: 100

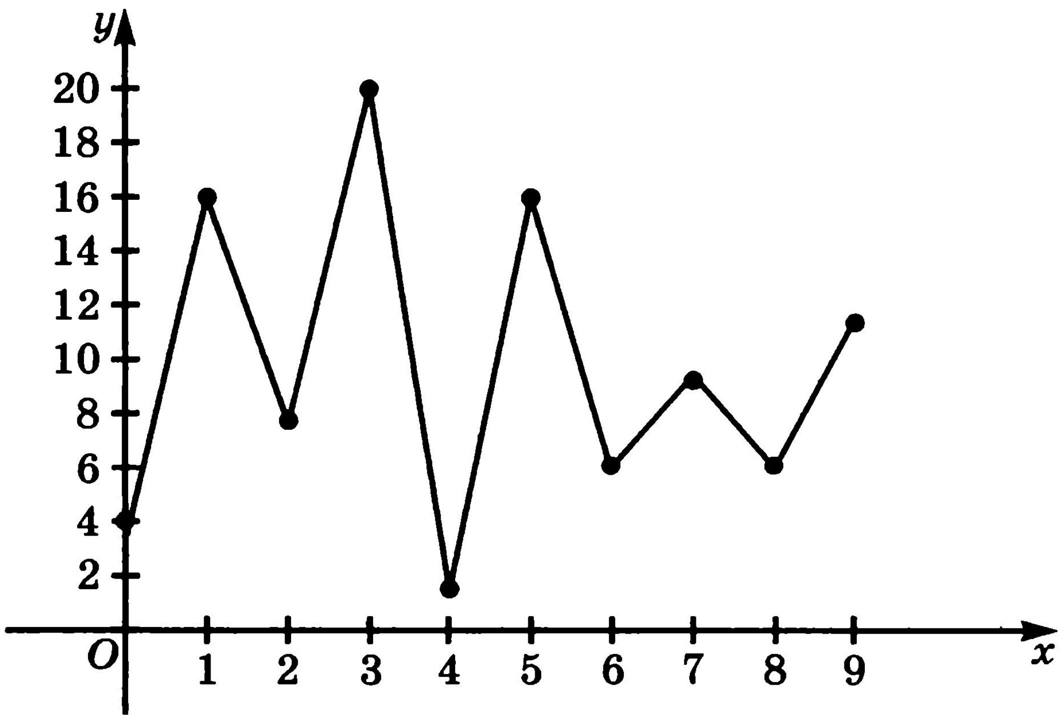
Многоугольник распределения частот



Статистические методы обработки информации

Варианты	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Всего: 10
Кратности	2	8	4	10	1	8	3	5	3	6	Сумма: 50
Частоты	0,04	0,16	0,08	0,2	0,02	0,16	0,06	0,1	0,06	0,12	Сумма: 1
Частоты (%)	4	16	8	20	2	16	6	10	6	12	Сумма: 100

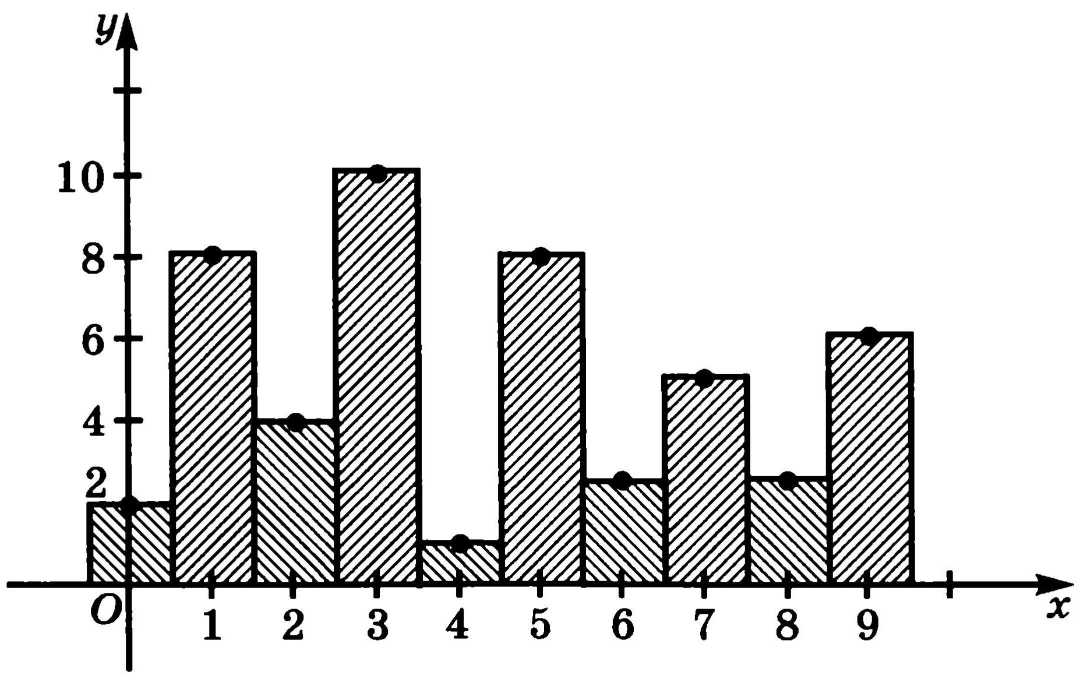
Многоугольник распределения процентных частот



Статистические методы обработки информации

Варианты	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Всего: 10
Кратности	2	8	4	10	1	8	3	5	3	6	Сумма: 50
Частоты	0,04	0,16	0,08	0,2	0,02	0,16	0,06	0,1	0,06	0,12	Сумма: 1
Частоты (%)	4	16	8	20	2	16	6	10	6	12	Сумма: 100

Гистограмма распределения кратностей



Статистические методы обработки информации

Варианты	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Всего: 10
Кратности	2	8	4	10	1	8	3	5	3	6	Сумма: 50
Частоты	0,04	0,16	0,08	0,2	0,02	0,16	0,06	0,1	0,06	0,12	Сумма: 1
Частоты (%)	4	16	8	20	2	16	6	10	6	12	Сумма: 100

$x_n - x_1$ называют *размахом* измерения

Размах равен 9 (9 = 9 − 0).

Мода ряда данных — это

Мода равна 3

Медианой ряда

$$\frac{4+5}{2} = 4{,}5.$$

среднее значение

$$\frac{0 \cdot 2 + 1 \cdot 8 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 10 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 8 + 6 \cdot 3 + 7 \cdot 5 + 8 \cdot 3 + 9 \cdot 6}{50} = 4{,}42.$$

Домашнее задание

сайт **alexlarin.net** *вар* 117