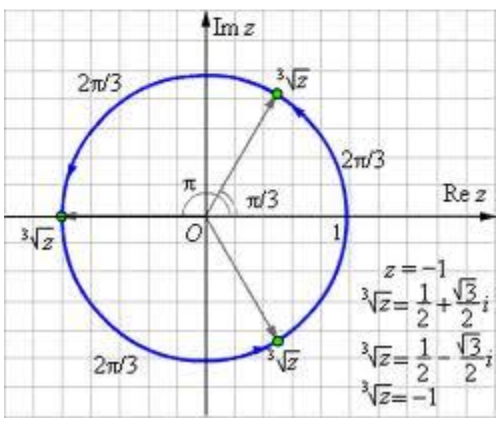
$$z = x + iy$$

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА



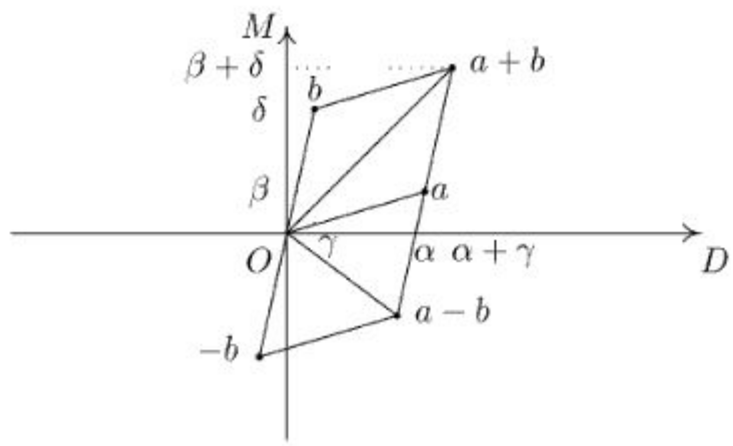
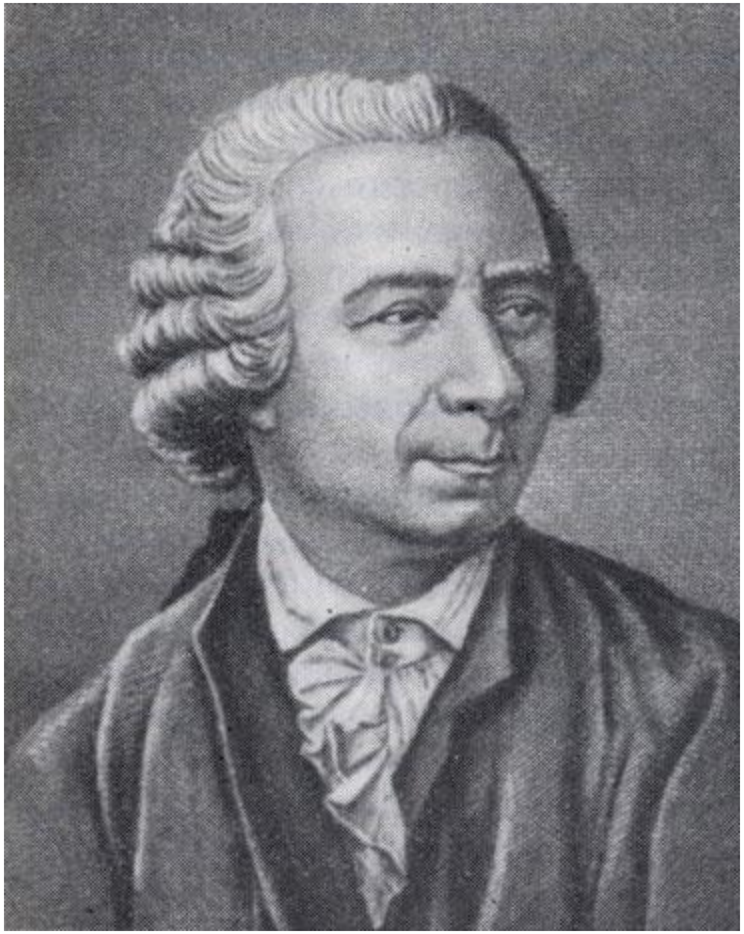


Рис. 1.2

Элемент, квадрат которого равен -1 называется мнимой единицей. Обозначается i (переводится «мнимый», «воображаемый»)

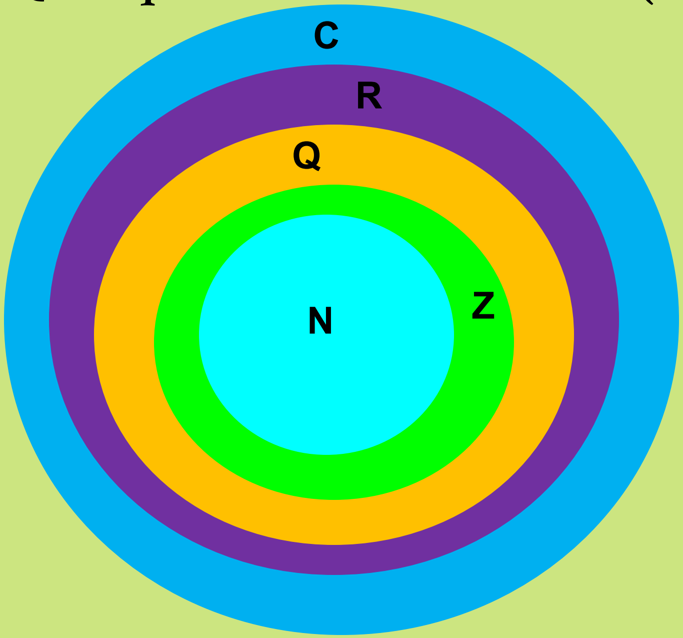
- "Комплексными числами и функциями комплексного переменного математики пользовались в своих исследованиях уже в XVIII в. Особенно велики заслуги крупнейшего математика XVIII в. Леонарда Эйлера (1707—1783), который по праву считается одним из творцов теории функций комплексного переменного. В замечательных работах Эйлера детально изучены элементарные функции комплексного переменного.

  После Эйлера открытые им результаты и методы развивались, совершенствовались и систематизировались, и в первой половине XIX в. теория функций комплексного переменного оформилась как важнейшая отрасль математического анализа. **Первое изложение теории комплексных чисел на русском языке принадлежит Л. Эйлеру** («Алгебра», Петербург, 1763, позднее книга была переведена на иностранные языки и многократно переиздавалась): **символ «*i*» также введен Л. Эйлером.** Геометрическая интерпретация комплексных чисел относится к концу XVIII в. (датчанин Каспар Вессель, 1799 г.)."



$$N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$$

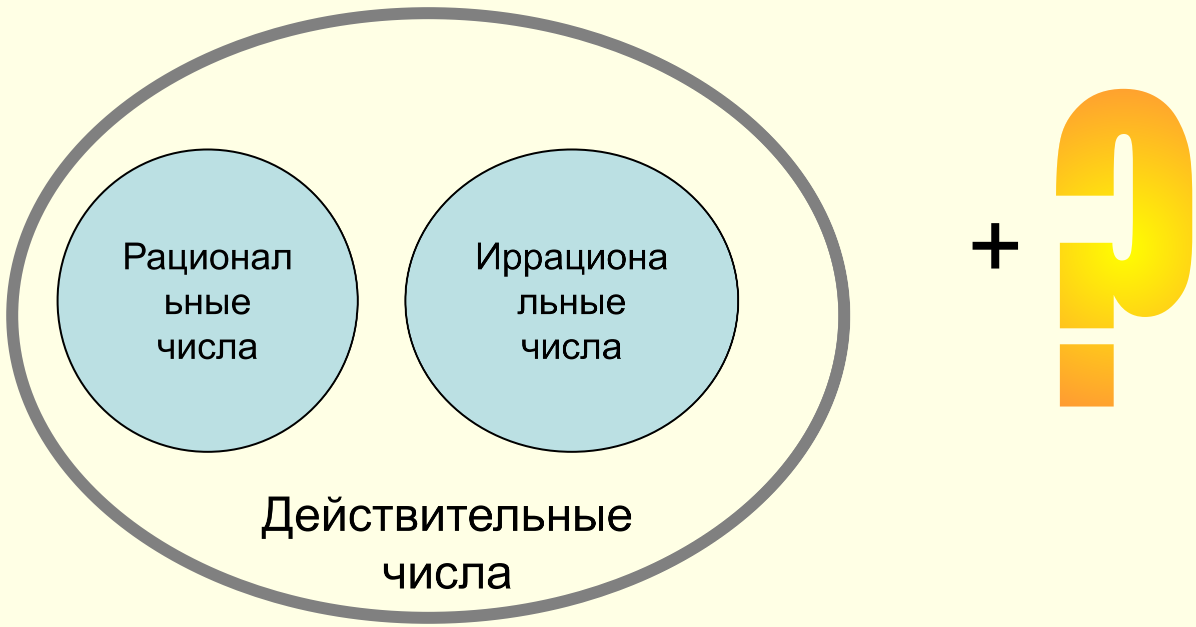
- N- ”natural” R- “real” C - “complex” Z – исключительная роль нуля “zero”
- Q – “quotient” отношение (т.к. рациональные числа – $\frac{m}{n}$).



Решение квадратных уравнений

$ax^2 + bx + c = 0$

При $D<0$ действительных корней нет



Вид комплексного числа

$x^2 = -1$

$x = \sqrt{-1}$

$x = i$ *-корень уравнения*

i- число, такое , что $i^2 = -1$

i – мнимая единица

Элемент i называется мнимой единицей. («imaginary» - переводится «мнимый», «воображаемый»)

$$i^2 = -1$$

Вычислите:

а) i^3; б) i^5; в) i^{22}; г) $i^{17} + i^{2005}$.

д) $(-i)^3$; е) $-i^{22} - (-i)^{22}$;

ж) $(-2i)^5$; з) $i^3 + i^5 + i^7 + \ldots + i^{2005}$.

Определение комплексного числа

<u>*Определение 1.*</u> **Комплексным числом называют сумму действительного числа и чисто мнимого числа.**

$$\boxed{\begin{gathered} z = a + bi \in C \Leftrightarrow a \in R,\ b \in R, \\ i \text{ — мнимая единица.} \end{gathered}}$$

Состав комплексного числа

КОМПЛЕКСНОЕ ЧИСЛО
$z = a + bi$

a
действительная часть числа

bi
мнимая часть числа

Например*:* *i, $2i$, $3i$* – чисто мнимые числа.

3; -1,5; 82 – действительные числа

$3+12i$; $0{,}8 - 36i$ – комплексные числа

Равенство комплексных чисел

__*Определение 2.*__ **Два комплексных числа называют равными, если равны их действительные части и равны их мнимые части:**

$$\boxed{a + bi = c + di \iff a = c,\ b = d.}$$

Например: $1 + 2i = 1 + 2i$

или $7 - 4i = -4i + 7$

Найдите x, если $-3 + i = -3 + xi$

$5{,}8 - 9i = x - 9i$

Сопряженные числа

Определение 3. **Если у комплексного числа сохранить действительную часть и поменять знак у мнимой части, то получится комплексное число, сопряженное данному.**

$$z = x + yi \quad и \quad \bar{z} = x - yi.$$

$$\boxed{\bar{z} \cdot z = x^2 + y^2.}$$

Например:

1) 5+ 2i и 5 - 2i

2) -3 - i и -3 + i

Арифметические операции над КЧ: сложение и вычитание

1) $ai + bi = (a + b)i$

$ai - bi = (a - b)i$

2) $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i.$

3) $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$

Например:

1) $2i + 3i =$

2) $(7 - 4i) - (i + 7) =$

3) $(-3+i) + (5{,}8 - 9i) =$

Арифметические операции над КЧ: умножение и деление

4) $a(bi) = (ab)i$

$(ai)(bi) = abi^2 = -ab$

5) $(a + bi)\cdot(c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i.$

6) $$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\,i.$$

Арифметические операции над КЧ: умножение и деление

$$(1 - 2i)(3 + i) = \qquad = 5 - 5i$$

$$(1 - 2i)(3 + 8i) = 19 + 2i.$$

$$(z\ )^2 = (3 + i)(3 + i) = 9 + 3i + 3i + i^2 = 8 + 6i;$$

$$(z\ )^3 = (-7i)(-7i)(-7i) = (-7)^3 i^3 = -343(i^2)i = 343i$$

Арифметические операции над КЧ: умножение и деление

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2-i}{1+3i} = \frac{(2-i)\cdot(1-3i)}{(1+3i)\cdot(1-3i)} =$$

$$= \frac{2-i-6i+3i^2}{1+9} = \frac{-1-7i}{10} = -0{,}1-0{,}7i;$$

$$\frac{1+3i}{2-i} = \frac{-1+7i}{5} = -0{,}2+1{,}4i.$$

Комплексные числа и квадратные уравнения

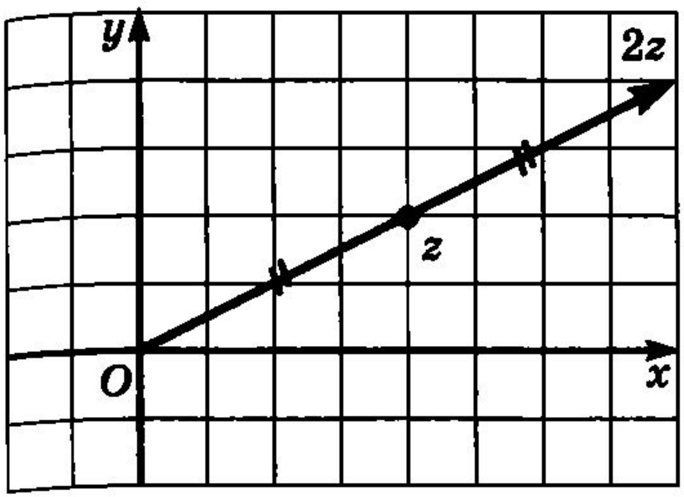
$$1)\ x^2 + 12 = 0$$

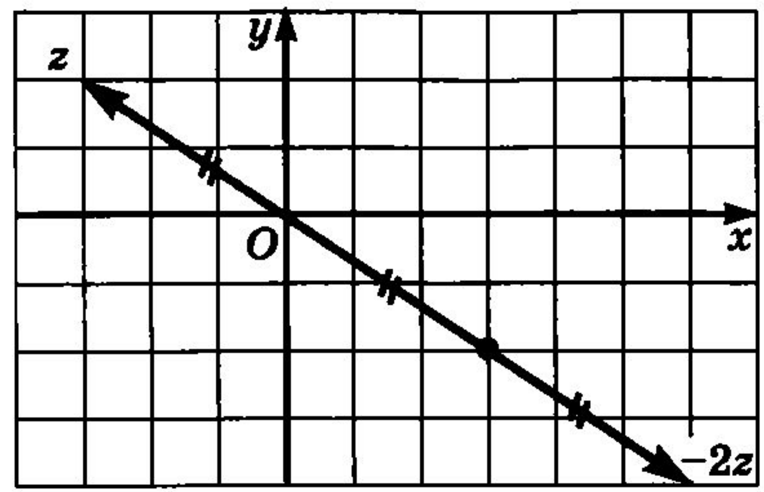
$$2)\ x^2 - 4x + 8 = 0$$

$$3)\ 2x^2 + 6x + 9 = 0$$

Комплексные числа и координатная плоскость

комплексным числом называют упорядоченную пару действительных чисел $z = (a; b)$, $a \in R$, $b \in R$.





$z=4+2i$

$2z = 8+4i$

$z=-3+2i$

$-2z = 6-4i$

Модуль комплексного числа

Определение 1. **Модулем комплексного числа** $z = a + bi$ **называют число** $\sqrt{a^2 + b^2}$**. Обозначение:** $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$**.**

а) $|21 - 20i| = \sqrt{21^2 + (-20)^2} = \sqrt{441 + 400} = \sqrt{841} = 29;$

б) $\left|-\frac{10}{i}\right| = \left|\frac{-10}{i} \cdot \frac{-i}{-i}\right| = |10i| = 10;$

в) $|i(i - 1)| = |-1 - i| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2};$

г) $\left|\frac{i - 1}{i}\right| = \left|\frac{i - 1}{i} \cdot \frac{-i}{-i}\right| = |1 + i| = \sqrt{2}.$

Тригонометрическая форма комплексного числа

Определение 2. **Тригонометрической формой записи отличного от нуля комплексного числа z называют его запись в виде**

$$z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \cos\alpha = \frac{x}{|z|} \qquad \sin\alpha = \frac{y}{|z|}$$

Алгебраическая форма	Тригонометрическая форма
$z = x + iy$	$z = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$
$x = \operatorname{Re} z$ — действительная часть z $y = \operatorname{Im} z$ — мнимая часть z	$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\rho = \lvert z \rvert$ ρ — модуль числа z

$$z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

Пример 4. Записать данное комплексное число в стандартной тригонометрической форме: а) $1 + i$; б) $-3 + 4i$; в) $-\sqrt{3} - i$; г) $2 - 2i\sqrt{3}$.

Решение. а) Найдем модуль числа $z = 1 + i$. Получим:

$$|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Значит, $z = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$. Осталось вычислить аргумент α:

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2},\ -\pi < \alpha \leqslant \pi.$$

Ясно, что $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Итак, $1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

$$z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

в) Найдем модуль числа $z = -\sqrt{3} - i$. Получим: $|z| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = 2$. Значит, $z = 2\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{-1}{2}i\right)$. Осталось вычислить аргумент α, исходя из следующих соображений: $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\alpha = -\frac{1}{2}$, $-\pi < \alpha \leqslant \pi$. Этим условиям удовлетворяет число $\alpha = -\frac{5\pi}{6}$ (см. § 13).

Итак, $-\sqrt{3} - i = 2\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)$.

Стандартная тригонометрическая форма записи	Тригонометрическая форма записи
$z = \lvert z \rvert \cdot (\cos\alpha + i\sin\alpha)$, $\alpha = \arg z \in (-\pi; \pi]$	$z = \lvert z \rvert (\cos\alpha + i\sin\alpha)$, $\alpha \in \boldsymbol{R}$

Например,

Число	Стандартная тригонометрическая форма	Тригонометрическая форма
3	$3(\cos 0 + i\sin 0)$	$3(\cos 2\pi + i\sin 2\pi)$, $3(\cos 26\pi + i\sin 26\pi)$, ...
$2i$	$2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$	$2\left(\cos\frac{5\pi}{2} + i\sin\frac{5\pi}{2}\right)$, $2\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)\right)$, ...
$1 - i$	$\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$	$\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{9\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{9\pi}{4}\right)\right)$, $\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$, ...

Возведение КЧ в степень

$z^2=(|z|\ (\cos\varphi+ i\sin\varphi))^2= |z|^2\ (\cos 2\varphi+ i\sin 2\varphi)$

$z^3= z^2\cdot z=[|z|\ (\cos\varphi+ i\sin\varphi)]^2\cdot|z|\ (\cos\varphi+ i\sin\varphi)=$

$= |z|^3\ (\cos 3\varphi+ i\sin 3\varphi)$

Формула Муавра

$$z^n = \left(|z|\cdot(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)\right)^n = |z|^n\cdot(\cos n\varphi + i\cdot\sin n\varphi)$$

Для любого $z = r\ (\cos\varphi+ i\sin\varphi)\neq 0$ и любого натурального числа n

Арифметический корень из КЧ

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\alpha + 2\pi k}{n} + i\cdot\sin\frac{\alpha + 2\pi k}{n}\right),$$

$$\textit{где}\quad k = 0,1,2,\ldots,n-1$$

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{\ }{}_{z}\left(\cos\frac{\alpha + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\alpha + 2\pi k}{3}\right), \text{ где } k = 0,\ 1,\ 2.$$

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{Z}\left(\cos\frac{\alpha + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\alpha + 2\pi k}{3}\right), \text{ где } k = 0, 1, 2.$$

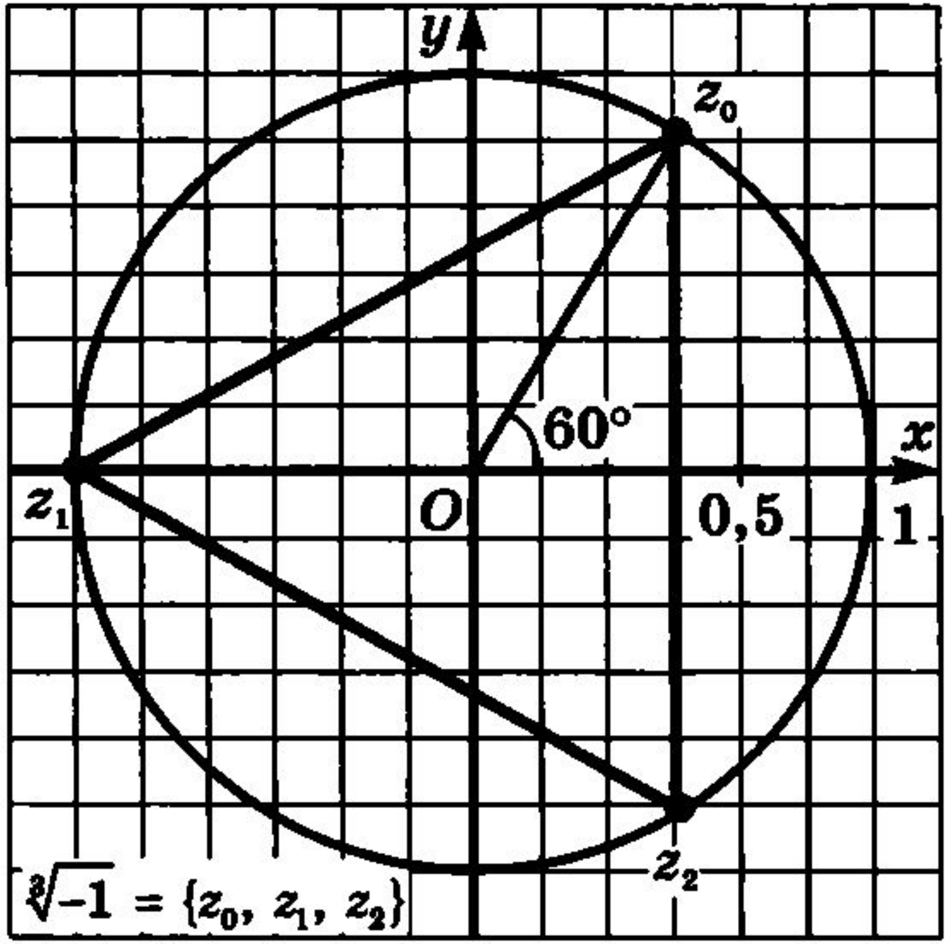
Пример 3. Вычислить: а) $\sqrt[3]{-1}$; б) $\sqrt[3]{i}$;

Решение. а) Если $z = -1$, то $\rho = 1$, $\alpha = \pi$. Значит,

$$z_0 = \cos\frac{\alpha + 2\pi\cdot 0}{3} + i\sin\frac{\alpha + 2\pi\cdot 0}{3} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}.$$

$$z_1 = \cos\frac{\alpha + 2\pi\cdot 1}{3} + i\sin\frac{\alpha + 2\pi\cdot 1}{3} = \cos\pi + i\sin\pi = -1.$$

$$z_2 = \cos\frac{\alpha + 2\pi\cdot 2}{3} + i\sin\frac{\alpha + 2\pi\cdot 2}{3} = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}.$$



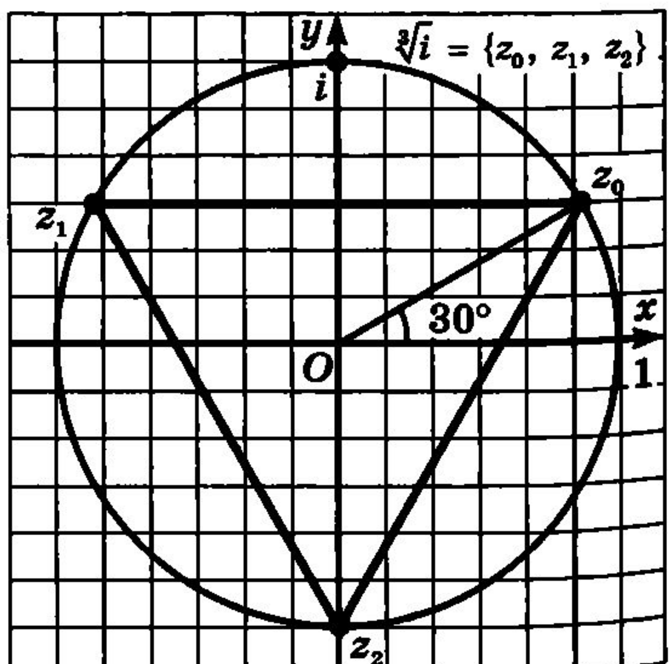
y
z_0
60°
x
z_1
O
0,5
1
z_2
$\sqrt[3]{-1} = \{z_0, z_1, z_2\}$

б) Если $z = i$, то $\rho = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Значит,

$$z_0 = \cos\frac{\alpha + 2\pi\cdot 0}{3} + i\sin\frac{\alpha + 2\pi\cdot 0}{3} = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}+i}{2}.$$

$$z_1 = \cos\frac{\alpha + 2\pi\cdot 1}{3} + i\sin\frac{\alpha + 2\pi\cdot 1}{3} = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = \frac{-\sqrt{3}+i}{2}.$$

$$z_2 = \cos\frac{\alpha + 2\pi\cdot 2}{3} + i\sin\frac{\alpha + 2\pi\cdot 2}{3} = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i.$$



Решить уравнение:

$$x^3 = -8$$

$$r = 2$$

$$x = 2 \cdot (\cos\frac{\pi + 2\pi k}{3} + i \cdot \sin\frac{\pi + 2\pi k}{3}),$$

$$k = 0,1,2.$$

$$x_1 = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = 1 + \sqrt{3} \cdot i$$

$$x_2 = 2(\cos(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3})) = -2$$

$$x_3 = 2(\cos(\frac{\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3} + \frac{4\pi}{3})) = 1 - \sqrt{3} \cdot i$$

Пример 4. Найти $\sqrt[4]{-1}$.

Решение. Представим число -1 в тригонометрической форме: $-1 = \cos\pi + i\sin\pi$. Применим теорему:

$$\sqrt[4]{\cos\pi + i\sin\pi} = \left\{\left(\cos\frac{\pi + 2\pi k}{4} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{4}\right) \middle| \, k = 0,\ 1,\ 2,\ 3\right\}.$$

В ответе получаем четыре числа:

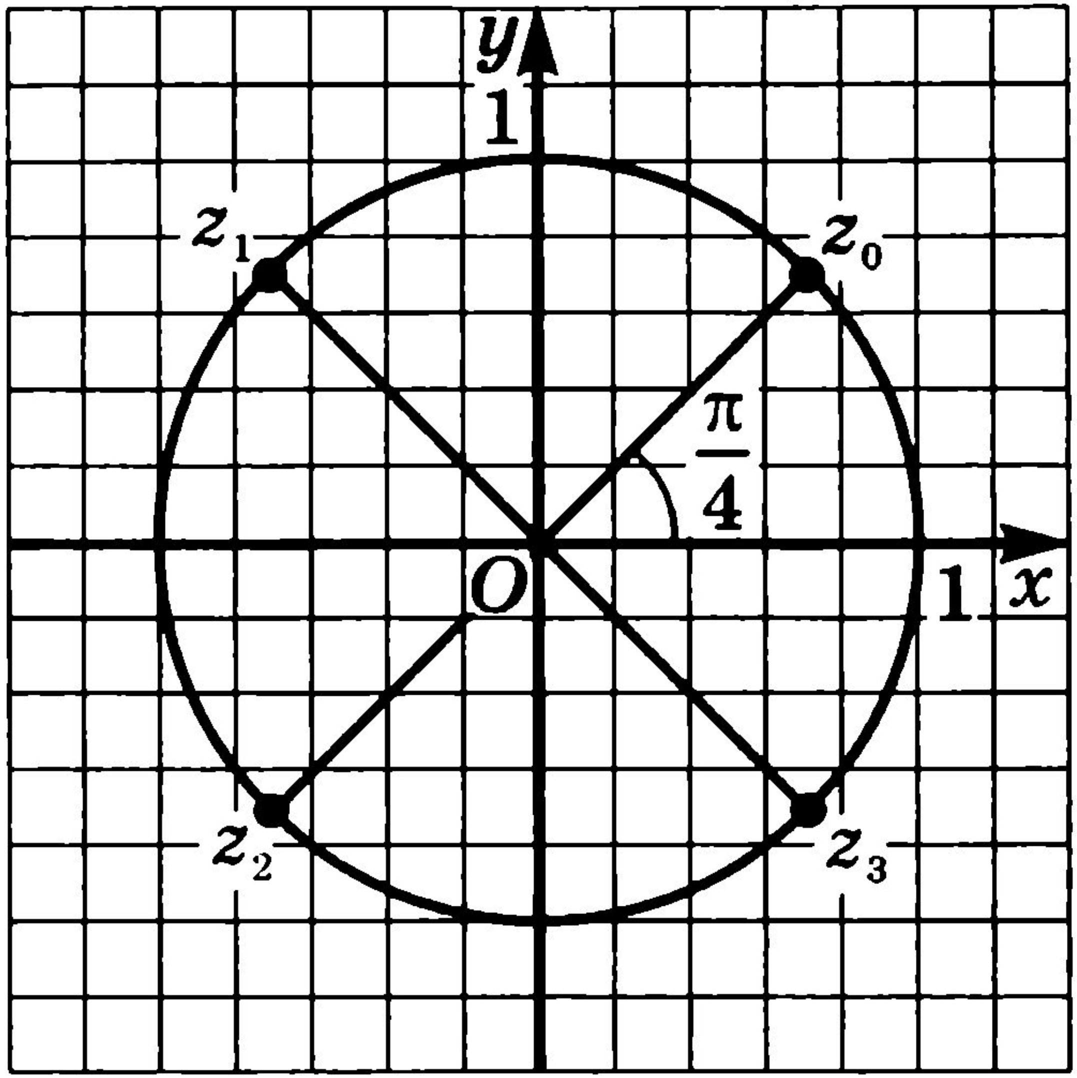
если $k = 0$, то $z_0 = \cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

если $k = 1$, то $z_1 = \cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

если $k = 2$, то $z_2 = \cos\dfrac{5\pi}{4} + i\sin\dfrac{5\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

если $k = 3$, то $z_3 = \cos\dfrac{7\pi}{4} + i\sin\dfrac{7\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (рис. 36).

Ответ: $\left\{\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.


y
1
z_1
z_0
$\frac{\pi}{4}$
O
1
x
z_2
z_3

Решение кубических уравнений.

Теорема 1. *Корни кубического уравнения* $x^3 + px + q = 0$ *находят по формуле Кардано*

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

При этом:

1) *если* $\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 > 0$, *то уравнение имеет ровно один действительный корень, который находится по указанной формуле;*

2) *если* $\Delta = 0$, *то уравнение имеет два действительных корня, один из которых двукратный (исключение — случай* $p = q = 0$, *когда есть один трехкратный корень* $x = 0$*);*

3) *если* $\Delta < 0$, *то уравнение имеет три действительных корня, которые равны удвоенным действительным частям трех кубических корней из комплексного числа* $-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}$.

Решить уравнения:

$x^3 + 9x - 26 = 0$

$x^3 - 36x - 91 = 0$