Тема 1. Численное интегрирование

В каких случаях необходимо использовать численное интегрирование?

- интеграл не вычисляется аналитически;

$$\int \frac{\sin x}{x} dx \,; \qquad \int \frac{dx}{\ln x} \,; \qquad \int e^{-x^2} dx; \quad \int \sqrt{1 - k^2 sin^2 x}\, dx$$

- подынтегральная функция имеет сложный вид;
- подынтегральная функция задана таблично.

Численное интегрирование

В основе численных методов – вычисление площади криволинейной трапеции

Методы:

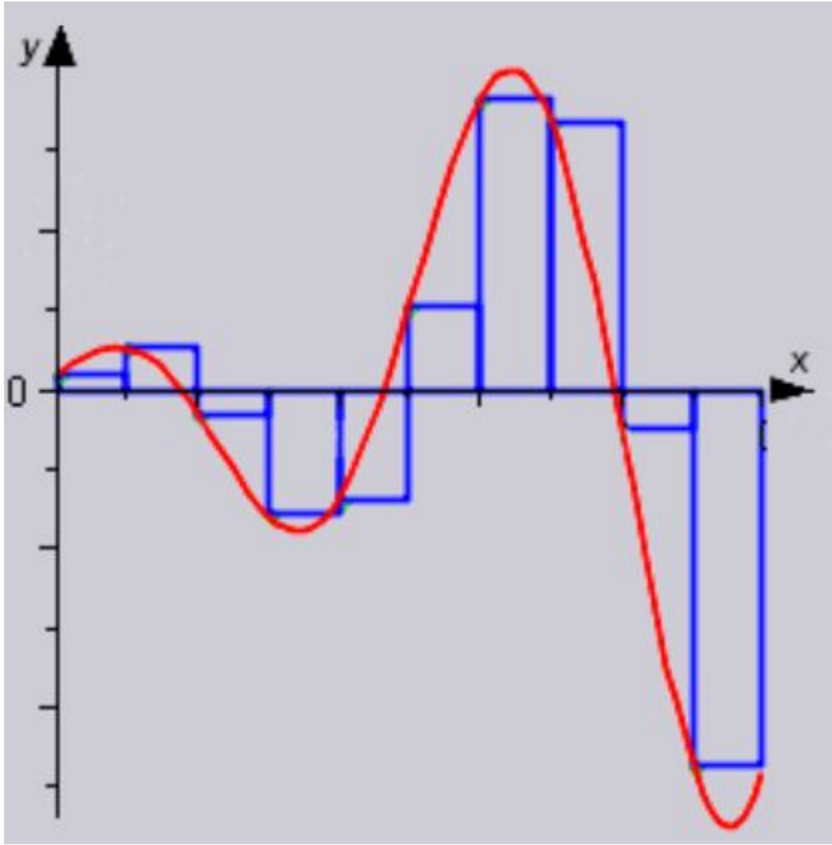
- **метод прямоугольников;**
- **метод трапеций;**
- **метод Симпсона (парабол);**
- **метод Гаусса.**

Вычисление интегралов с заданной точностью (автоматическим выбором шага интегрирования).
Вычисление несобственных интегралов.
Вычисление кратных интегралов.

Методы прямоугольников

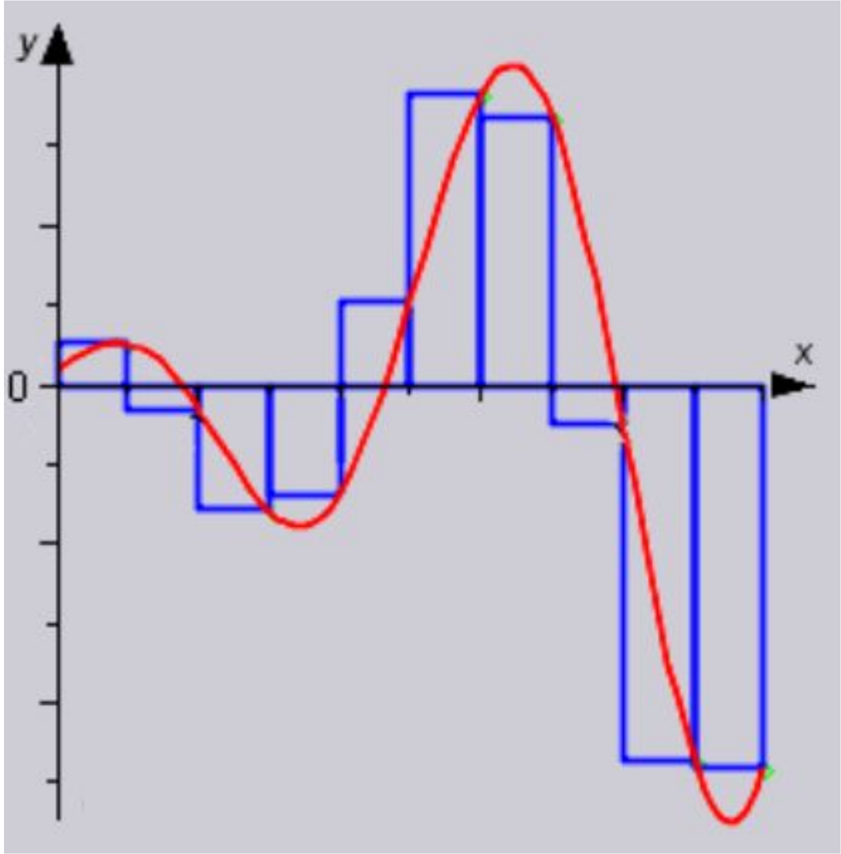
- метод левых прямоугольников;
- метод правых прямоугольников;
- метод средних прямоугольников.

Метод левых прямоугольников



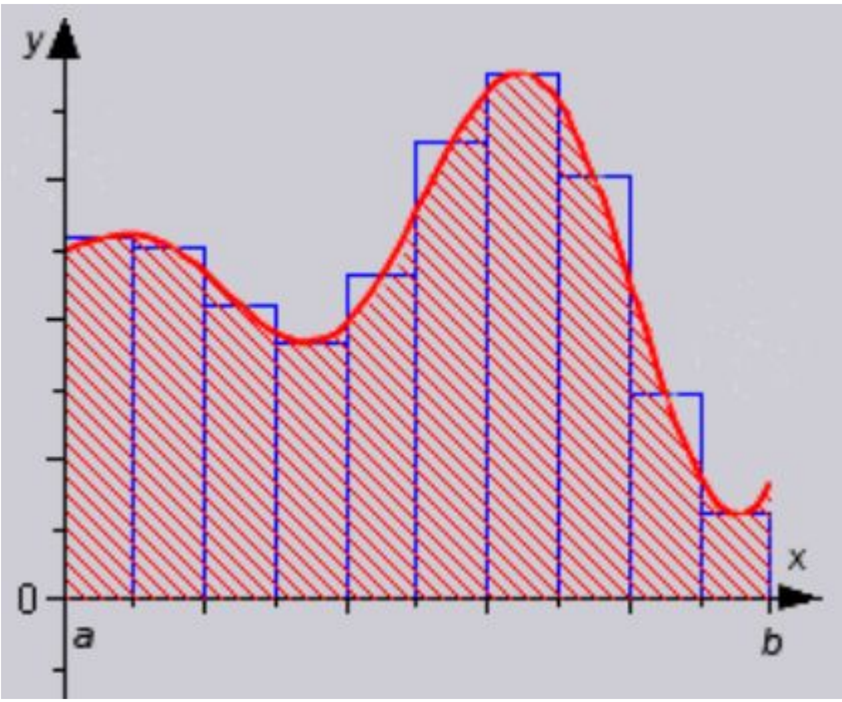
$$I = \int_a^b f(x)dx \approx h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$

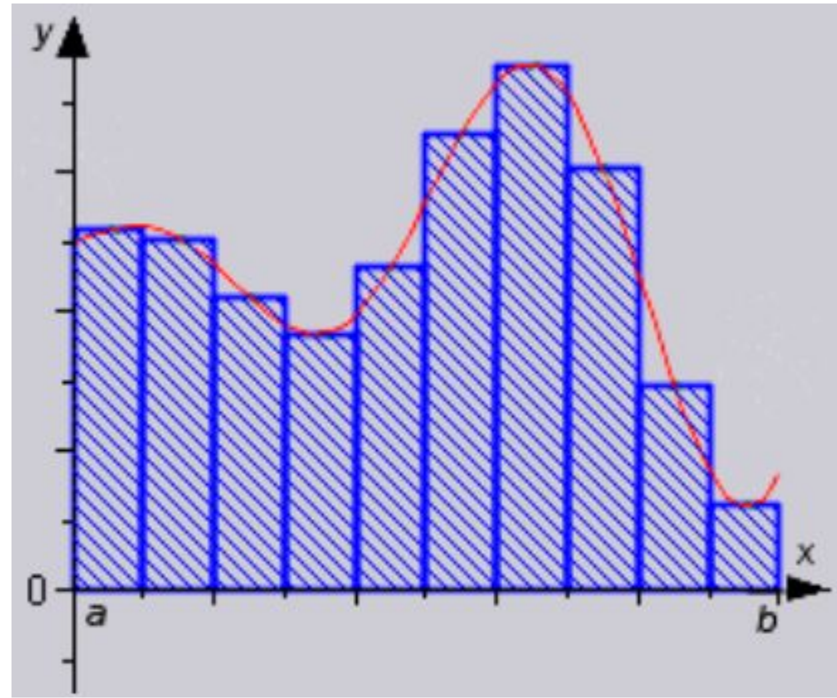
Метод правых прямоугольников



$$I = \int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

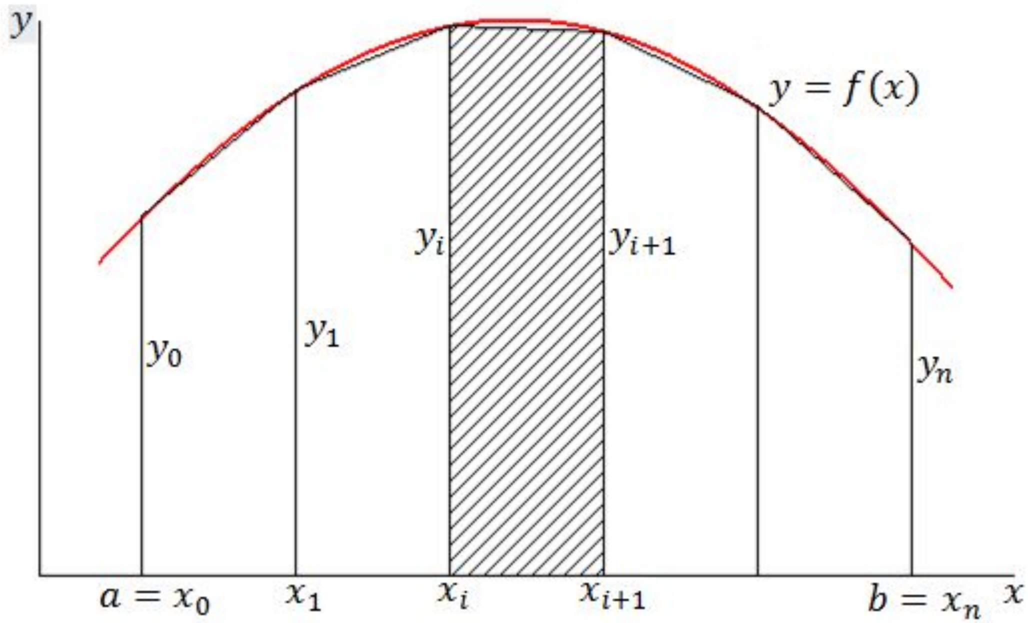
Метод средних прямоугольников





$$I = \int_a^b f(x)dx \approx h \sum_{i=1}^{n} f\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}\right)$$

Метод трапеций



$$h = \frac{b-a}{n}$$

Формула трапеций

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right)$$

Точность интегрирования $\varepsilon \approx h^2$

Метод Симпсона (парабол)

Количество интервалов $n = 2m$

Площадь параболы $s_i = \frac{h}{3}(y_{2i-2} + 4y_{2i-1} + y_{2i})$

Формула Симпсона

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 \ldots + 4y_{2m-1} + y_{2m})$$

Точность интегрирования $\varepsilon \approx h^3 \div h^4$

Метод Гаусса

Квадратурная формула Гаусса

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$$

$$x_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}\xi_i$$

ξ_i **– относительные координаты узлов;**

w_i **– весовые коэффициенты.**

Значения ξ_i **и** w_i **подбираются так, чтобы формула была точна для всех многочленов степени** $2n-1$.

Квадратурная формула Гаусса обеспечивает очень высокую точность при небольшом числе узлов.

Метод Гаусса

Вычисление ξ_i

ξ_i **– корни полиномов Лежандра;**

Полиномы Лежандра

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n]$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x)$$

$n = 3$ $\quad \xi_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}} = -0{,}774597 \quad \xi_2 = 0 \quad \xi_3 = \sqrt{\frac{3}{5}} = 0{,}774597$

Метод Гаусса

Весовые коэффициенты

$$w_1 + w_2 + w_3 = 2$$

$$w_1\,\xi_1 + w_2\,\xi_2 + w_3\,\xi_3 = 0$$

$$w_1\,\xi_1^2 + w_2\,\xi_2^2 + w_3\,\xi_3^2 = \frac{2}{3}$$

Демидович Б.П. Марон И.А. Основы вычислительной математики, с. 597

Правые части

$$b_i = \begin{cases} \dfrac{2}{i+1} & \text{при } i - \text{четном} \\ 0 & \text{при } i - \text{четном} \end{cases} \qquad i = 0,1,2$$

$$w_1 = w_3 = \frac{5}{9};\; w_2 = \frac{8}{9}$$

Метод Гаусса можно использовать для вычисления несобственных интегралов от неограниченных функций, если особые точки подынтегральной функции лежат на концах отрезка интегрирования.

$$\int_0^1 \frac{\cos x}{x}\,dx$$

Метод Гаусса

Координаты узлов и весовые коэффициенты для метода Гаусса

n	ξ_i	W_i
2	∓0,577350	1,0
3	0,0	8/9
	∓0,774597	5/9
4	∓0,861136	0,347855
	∓0,339981	0,652145
5	0,0	0,568889
	∓0,538469	0,478629
	∓0,906180	0,236927

Вычисление интеграла с автоматическим выбором шага интегрирования

1. Начальное значение шага интегрирования $h = \sqrt[4]{\varepsilon}$

2. Вычисление значения интеграла I_n с шагом h.

3. Значение шага h делится пополам и вычисление интеграла I_{2n} ведется для шага $h/2$.

4. Если разность $| I_n - I_{2n} | < \varepsilon$, то значение считается значением I_{2n} интеграла, вычисленным с точностью ε.

Если разность $| I_n - I_{2n} | > \varepsilon$, то продолжают деление шага и вычисляют значения I_{4n}, I_{8n} и т. д.

Вычисление несобственных интегралов

$$\int_a^\infty f(x)dx$$ *f(x)* непрерывна на $a \le x \le \infty$

$$\int_a^\infty f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^\infty f(x)dx \qquad \left|\int_b^\infty f(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Алгоритм

1. Задание начального значения b.

2. Вычисление значения интеграла I_b с точностью ε/2.

3. Значение верхнего предела интегрирования увеличивается вдвое и вычисление интеграла I_{2b} .

4. Если разность | I_b - I_{2b} | < ε/2, то значение считается значением I_{2b} несобственного интеграла, вычисленного с точностью ε.

Если разность | I_b - I_{2b} | > ε/2, то продолжают деление шага и вычисляют значения I_{4b}, I_{8b} и т. д.

Вычисление несобственных интегралов

Для вычисления несобственного интеграла лучше всего использовать метод Гаусса, который обеспечивает более высокую точность вычисления при небольшом числе узлов.

Задание

1. **Вычислить значение интеграла в MathCAD.**
2. **Написать программу для вычисления интеграла с использованием метода трапеций.**
3. **Написать программу для вычисления интеграла с использованием метода Симпсона.**
4. **Написать программу для вычисления интеграла с использованием метода Гаусса.**
5. **Написать программу для вычисления интеграла с заданной точностью*.**
6. **Написать программу для вычисления несобственного интеграла*.**

Контрольные вопросы

1. Алгоритмы численного интегрирования (методы прямоугольников, трапеций, Симпсона и Гаусса). Составить программы с использованием этих методов.

2. Вывод формул для методов трапеций и Симпсона.

3. Виды погрешностей при вычислении интегралов.

4. Алгоритм вычисления интеграла с автоматическим выбором шага интегрирования.

5*. Программа вычисления интеграла с автоматическим выбором шага интегрирования.

6. Алгоритм вычисления несобственного интеграла.

7*. Программа вычисления несобственного интеграла.

8. Численное и аналитическое вычисление интегралов в системе MathCAD.

Спасибо
за внимание!