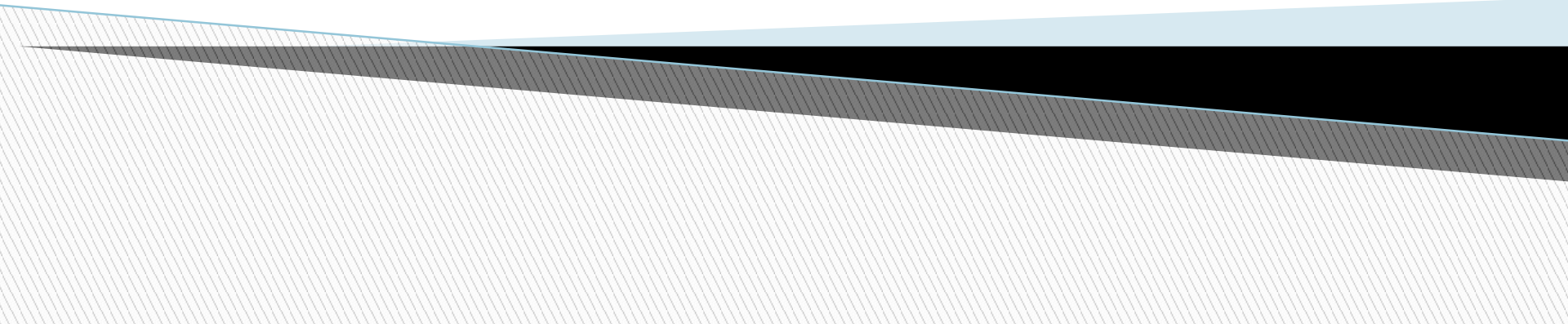


Методы обработки числовых данных



Методы обработки числовых данных

Числовые данные

- Таблицы
- Экспериментальные данные

Цель

Получение функциональной зависимости $y = f(x)$

2 подхода

1. Интерполяция - аппроксимирующая функция должна пройти через все точки
2. Регрессия - аппроксимирующая функция не обязательно должна проходить через все точки

Интерполяция

Сущность интерполяции состоит в отыскании значения функции в некоторой промежуточной точке

Виды интерполяции:

- **интерполяция по Лагранжу;**
- **линейная;**
- **квадратичная;**
- **сплайн-интерполяция.**

Интерполяция по Лагранжу

Интерполяционный полином

$$P_n(x) = y_0b_0(x) + y_1b_1(x) + \dots + y_nb_n(x)$$

$b_j(x)$ – многочлены степени n

Система уравнений

$$P_n(x_i) = y_i \quad i = 0, 1, \dots, n$$

или

$$y_0b_0(x_0) + y_1b_1(x_0) + \dots + y_nb_n(x_0) = y_0,$$

...

$$y_0b_0(x_n) + y_1b_1(x_n) + \dots + y_nb_n(x_n) = y_n$$

Интерполяция по Лагранжу

$$b_j(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j \\ 0 & \text{при } i \neq j \end{cases}$$

$$b_j(x) = C_j(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \dots (x - x_n)$$

$$b_j(x_j) = 1$$

$$C_j = 1/((x_j - x_0)(x_j - x_1) \dots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \dots (x_j - x_n))$$

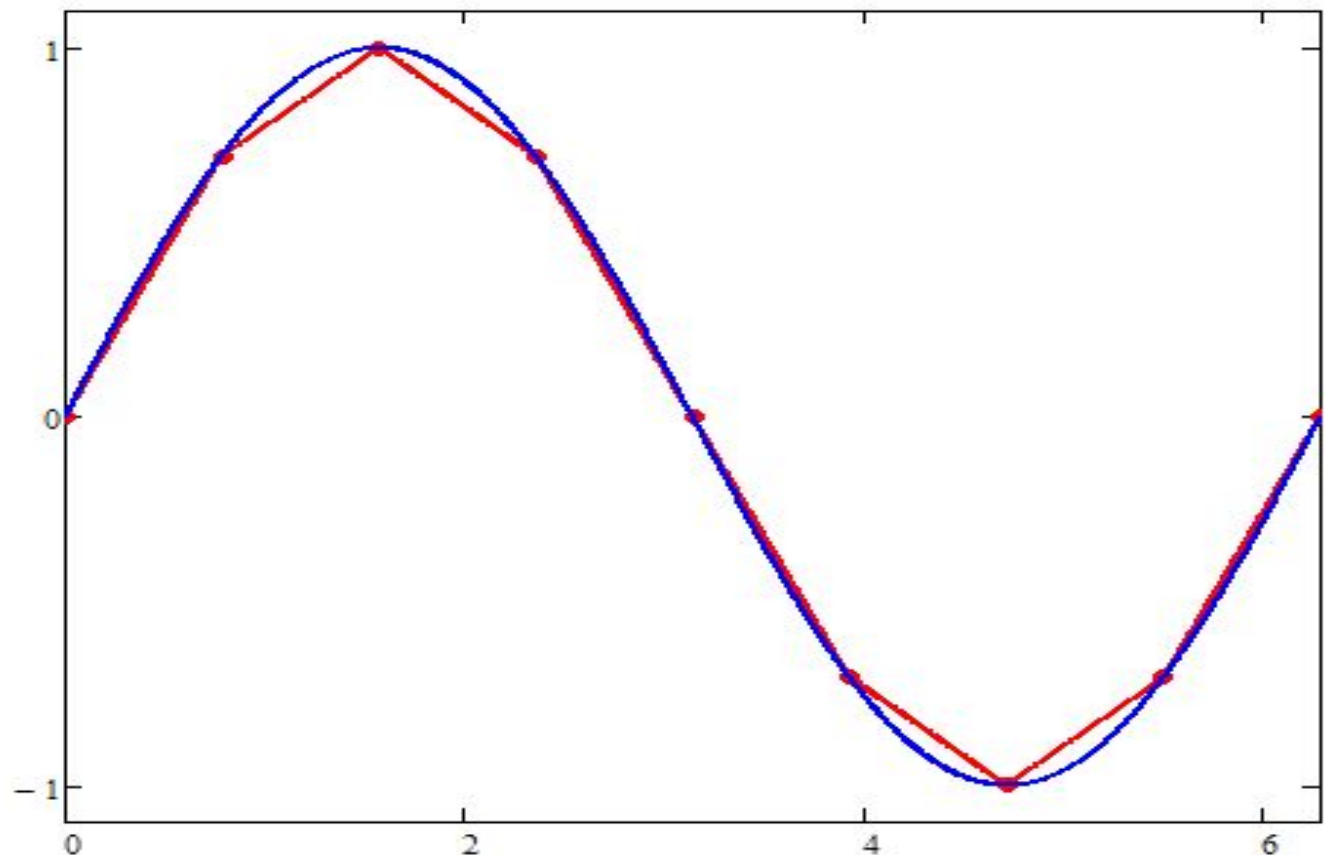
$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n y_j \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \dots (x - x_n)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1) \dots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \dots (x_j - x_n)}$$

$$L_j(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \dots (x - x_n)$$

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n y_j \frac{L_j(x)}{L_j(x_j)}$$

Линейная интерполяция

В основе линейной интерполяции лежит аппроксимация кривой на участке между точками (x_i, y_i) и (x_{i+1}, y_{i+1}) прямой, проходящей через те же точки



Линейная интерполяция

Уравнение прямой, проходящей через 2 точки

$$y - y_i = k(x - x_i), \quad k = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$$

Линейная интерполяция (Mathcad)

`linterp (X, Y, x)`

X — вектор табличных значений аргумента;

Y — вектор табличных значений функции;

x — значение аргумента, при котором вычисляется интерполирующее значение функции.

Линейная интерполяция

$X := (0 \ 60 \ 90 \ 120 \ 180)$

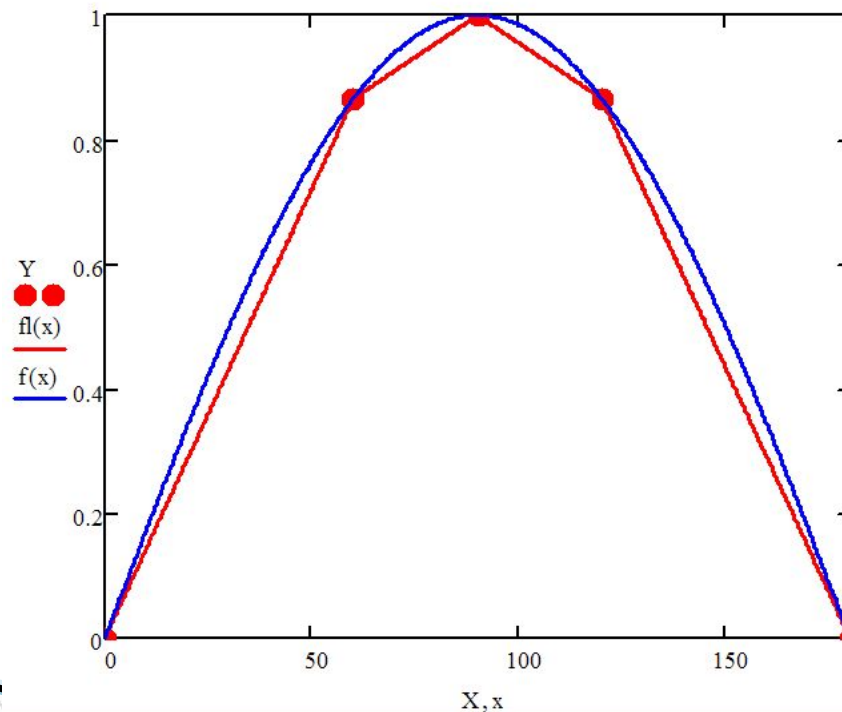
$X := X^T$

$Y := (0 \ 0.866 \ 1 \ 0.866 \ 0)$

$Y := Y^T$

$fl(x) := \text{linterp}(X, Y, x)$

$f(x) := \sin\left(\frac{x \cdot \pi}{180}\right)$



$\text{linterp}(X, Y, 30) = 0.433$

$fl(30) = 0.433$

$f(30) = 0.5$

Сплайн-интерполяция

Сплайн – это группа сопряженных кубических многочленов, в местах сопряжения которых первая и вторая производные непрерывны.

Такие функции называют кубическими сплайнами.

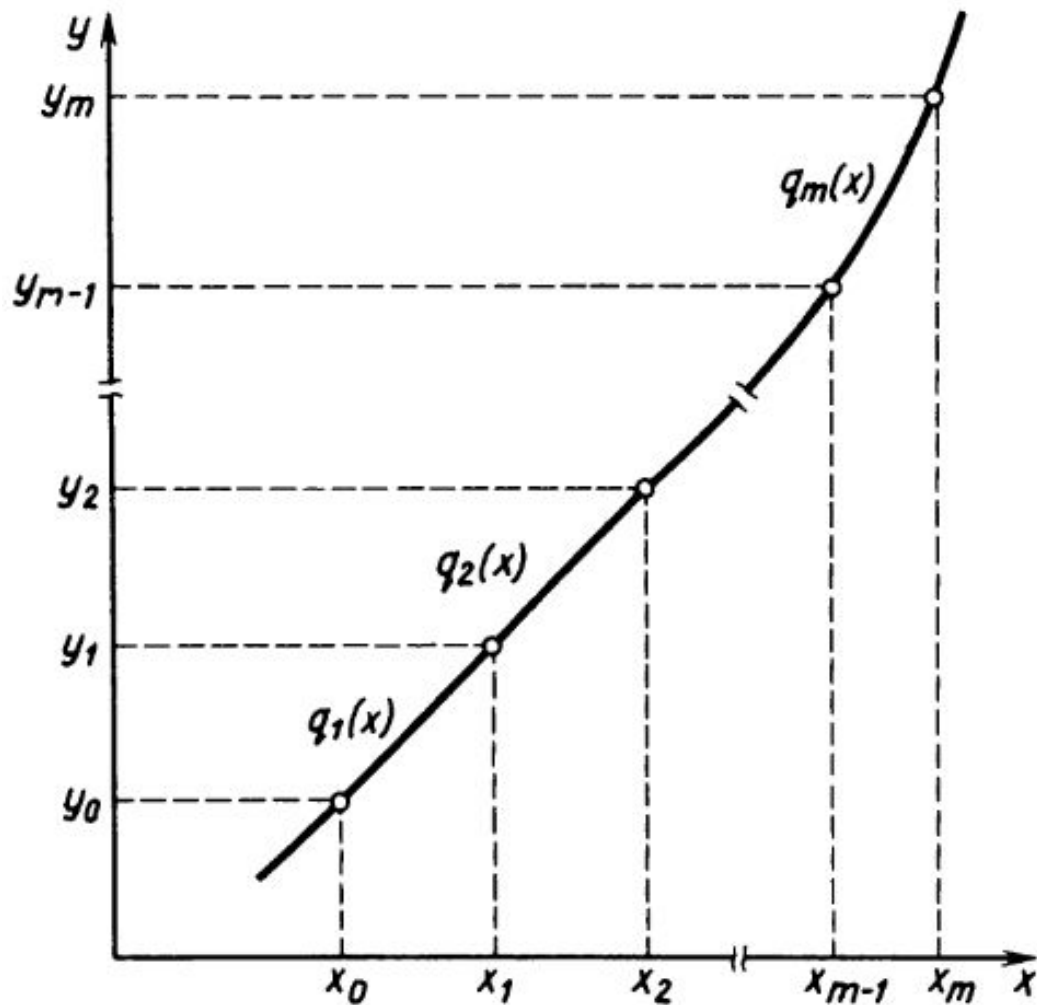
Чтобы построить кубический сплайн, необходимо задать коэффициенты, которые единственным образом определяют кубический многочлен в промежутке между данными точками.

Необходимо задать все кубические функции $q_1(x)$, $q_2(x)$, ..., $q_m(x)$.

$$q_i(x) = k_{i1} + k_{i2}x + k_{i3}x^2 + k_{i4}x^3$$

$$i = 1, 2, \dots, m$$

Сплайн-интерполяция



Сплайн-интерполяция

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ

СПЛАЙНОВ

Условие непрерывности сплайна

$$\begin{aligned}q_i(x_i) &= y_i, \quad i = 1, \dots, m \\q_{i+1}(x_i) &= y_i, \quad i = 0, \dots, m - 1\end{aligned}$$

Условие непрерывности первых производных

$$q'_{i+1}(x_i) = q'_i(x_i), \quad i = 1, \dots, m - 1$$

Условие непрерывности вторых производных

$$q''_{i+1}(x_i) = q''_i(x_i), \quad i = 1, \dots, m - 1$$

Два недостающих уравнения получают из ограничений на значение сплайна и его производных на концах промежутка $[a, b]$; их называют краевыми условиями.

«Естественные» краевые условия

$$q''_1(x_0) = 0 \text{ и } q''_m(x_m) = 0$$

Сплайн-интерполяция

$$q_i(x) = ty_i + (1-t)y_{i-1} + \Delta x_i[(k_{i-1} - d_i)t(1-t)^2 - (k_i - d_i)t^2(1-t)]$$

$$i = 1, \dots, m$$

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad t = \frac{x - x_{i-1}}{\Delta x_i} \quad d_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x_i}$$

При таком выборе кубических многочленов автоматически удовлетворяются все условия, кроме условий, налагаемых на вторые производные

**Условие непрерывности вторых производных
для внутренних точек**

$$k_{i-1}\Delta x_{i+1} + 2k_i(\Delta x_i + \Delta x_{i+1}) + k_{i+1}\Delta x_i = 3(d_i\Delta x_{i+1} + d_{i+1}\Delta x_i)$$

для двух внешних

$$2k_0 + k_1 = 3d_1$$

$$k_{m-1} + 2k_m = 3d_m$$

Сплайн-интерполяция

Система уравнений

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \Delta x_2 & 2(\Delta x_1 + \Delta x_2) & \Delta x_1 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta x_3 & 2(\Delta x_2 + \Delta x_3) & \Delta x_2 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & \Delta x_m & 2(\Delta x_{m-1} + \Delta x_m) & \Delta x_{m-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} k_0 \\ k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_{m-1} \\ k_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_1 \Delta x_2 + d_2 \Delta x_1 \\ d_2 \Delta x_3 + d_3 \Delta x_2 \\ \vdots \\ d_{m-1} \Delta x_m + d_m \Delta x_{m-1} \\ d_m \end{pmatrix}$$

Система уравнений – трехдиагональная

Для решения таких систем используется метод прогонки

Существуют и другие сплайны, получающиеся при других условиях на концах или использовании многочленов более высоких степеней

Слайн-интерполяция (Mathcad)

`interp(vs, X, Y, x)`

vs - вектор вторых производных, созданный функцией **`lspline(X, Y)`**, **`spline(X, Y)`** или **`cspline(X, Y)`**;

X – вектор табличных значений аргумента;

Y – вектор табличных значений функции;

x – значение аргумента, при котором вычисляется интерполирующее значение функции.

`lspline(X, Y)` – создает вектор коэффициентов кривой, которая приближается к прямой линии в граничных точках;

`pspline(X, Y)` – создает вектор коэффициентов кривой, которая приближается к квадратичной параболе в граничных точках;

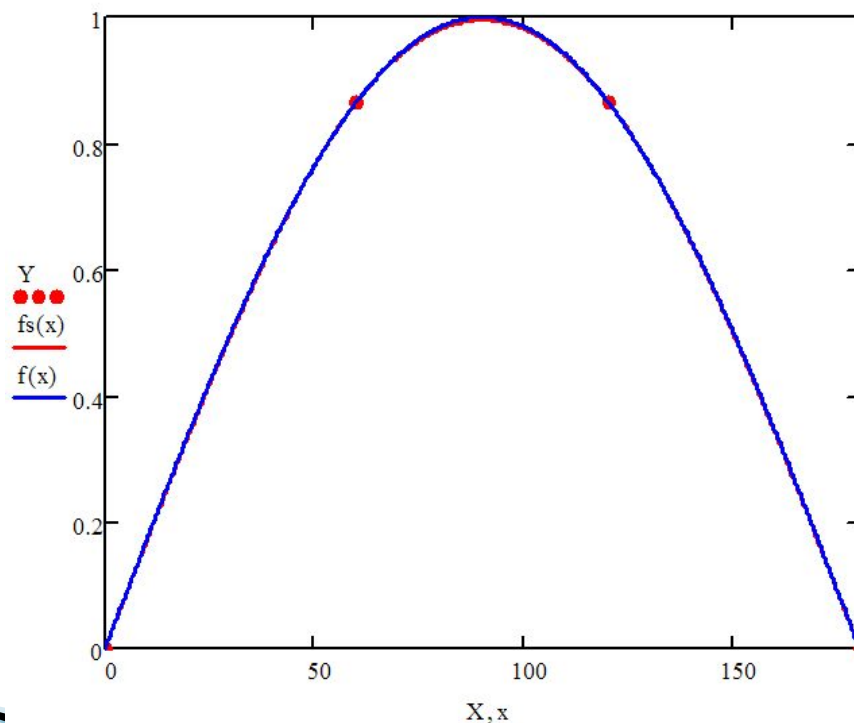
`cspline(X, Y)` – создает вектор коэффициентов кривой, которая приближается к кубической параболе в граничных точках.

Слайн-интерполяция (Mathcad)

$$X := (0 \quad 60 \quad 120 \quad 180) \quad X := X^T$$

$$Y := (0 \quad 0.866 \quad 0.866 \quad 0) \quad Y := Y^T$$

$$fs(x) := \text{interp}(\text{lspline}(X, Y), X, Y, x) \quad f(x) := \sin\left(\frac{x \cdot \pi}{180}\right)$$



$$fs(30) = 0.498$$

$$fs(90) = 0.996$$

Обработка экспериментальных данных

Метод наименьших квадратов

$$y = a_0 + a_1 x$$

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

$$S = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - y_i)^2 = \sum_{i=1}^n (a_0 + a_1 x_i - y_i)^2$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 2 \sum_{i=1}^n (a_0 + a_1 x_i - y_i) \cdot 1 = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = 2 \sum_{i=1}^n (a_0 + a_1 x_i - y_i) \cdot x_i = 0$$

$$\begin{cases} n \cdot a_0 + \sum_{i=1}^n x_i \cdot a_1 = \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i \cdot a_0 + \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot a_1 = \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{cases}$$

Метод наименьших квадратов

Реализация в Mathcad (способ 1)

ORIGIN := 1 n := 6

$$y = 1 + 2x$$

$$x := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad y := \begin{pmatrix} 0.9 \\ 3.2 \\ 4.5 \\ 7.6 \\ 9.5 \\ 10.4 \end{pmatrix}$$

$$\underline{A} := \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n (x_i)^2 \end{bmatrix}$$

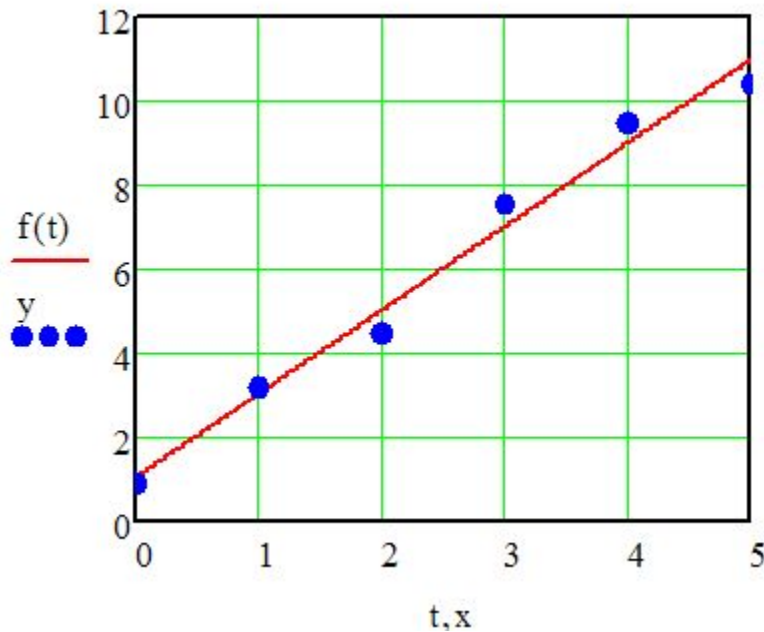
$$B := \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n (x_i \cdot y_i) \end{bmatrix}$$

Метод наименьших квадратов

Реализация в Mathcad

$$X := A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1.052 \\ 1.986 \end{pmatrix} \quad \underline{a_0} := X_1 \quad a_1 := X_2$$

$$f(x) := a_0 + a_1 x$$



$$\text{corr}(f(x), y) = 0.991$$

Метод наименьших квадратов

Реализация в Mathcad (способ 2)

ORIGIN := 1 n := 6 y = 1 + 2x

$$x := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad y := \begin{pmatrix} 0.9 \\ 3.2 \\ 4.5 \\ 7.6 \\ 9.5 \\ 10.4 \end{pmatrix}$$

i := 1..n

$X_i := 1$

$X^{(2)} := x$

$X^{(3)} := x^2$

A := $X^T X$

B := $X^T y$

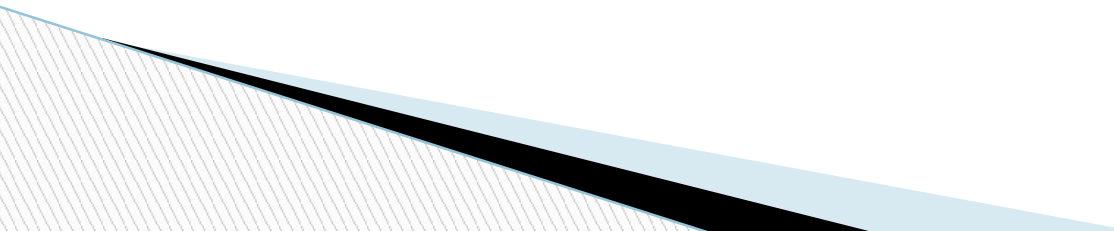
$$X := A^{-1} B = \begin{pmatrix} 0.779 \\ 2.396 \\ -0.082 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \\ 1 & 5 & 25 \end{pmatrix}$$

Задание

1. Написать функцию с использованием C++Builder, аналогичную функции `linterp` в MathCAD (линейная интерполяция) с построением графиков.
2. Написать функцию с использованием C++Builder, реализующую интерполяцию по Лагранжу с построением графиков.
3. Написать функцию с использованием C++Builder, аналогичную функции `interp` в MathCAD (сплайн-интерполяция) с построением графиков.
4. Написать функцию с использованием C++Builder для обработки экспериментальных данных методом наименьших квадратов с построением графиков.

Контрольные вопросы

1. **Использование линейной и сплайн-интерполяции в MathCAD.**
 2. **Реализация метода наименьших квадратов в MathCAD**
 3. **Интерполяция по Лагранжу.**
 4. **Линейная интерполяция.**
 5. **Сплайн-интерполяция.**
 6. **Метод наименьших квадратов.**
- 

**Благодарю
за внимание!**