

Тема 5. Устойчивость пластин и оболочек

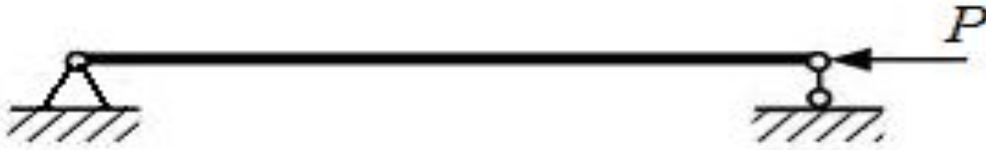


Понятие об устойчивости.

Задача Эйлера

Под устойчивостью понимается свойство системы самостоятельно восстанавливать свое первоначальное состояние после того, как ей было сообщено некоторое отклонение от положения равновесия.

Задача Эйлера – задача о равновесии стержня, сжатого центральными силами



При малых прогибах

$$EIy'' = M$$

Изгиб стержня происходит в плоскости минимальной жесткости и поэтому под величиной I понимается минимальный момент инерции сечения.

Понятие об устойчивости.

Задача Эйлера

$$M = -Py \quad EIy'' = -Py \quad k^2 = \frac{P}{EI}$$
$$y'' + k^2y = 0$$
$$y = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx$$

Граничные условия

1) $y(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

2) $y(L) = 0 \Rightarrow C_1 \sin kL = 0$

$$C_1 = 0 \quad C_1 = C_2 = 0$$

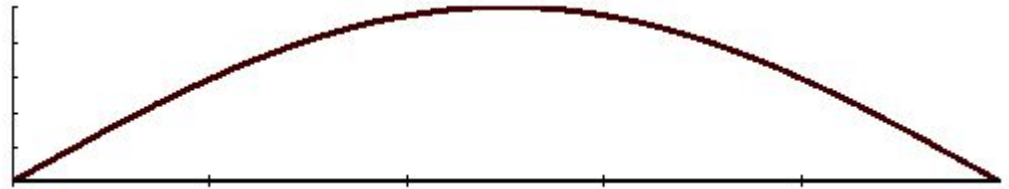
Понятие об устойчивости. Задача Эйлера

$$\begin{aligned} \sin kL = 0 & \Rightarrow kL = \pi n & k = \frac{\pi n}{L} \\ k^2 = \frac{P}{EI} & P = EI k^2 = \frac{\pi^2 n^2}{L^2} EI \\ n = 1 & P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \\ k = \frac{\pi}{L} & \Rightarrow y = C_1 \sin \frac{\pi x}{L} \\ k = \frac{\pi n}{L} & \Rightarrow y = C_1 \sin \frac{\pi n x}{L} \end{aligned}$$

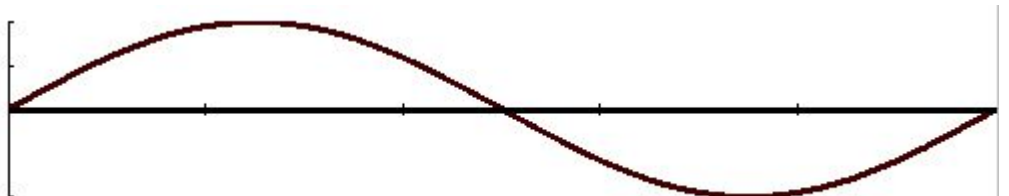
Устойчивость стержней

$$y = C_1 \sin \frac{\pi n x}{L}$$

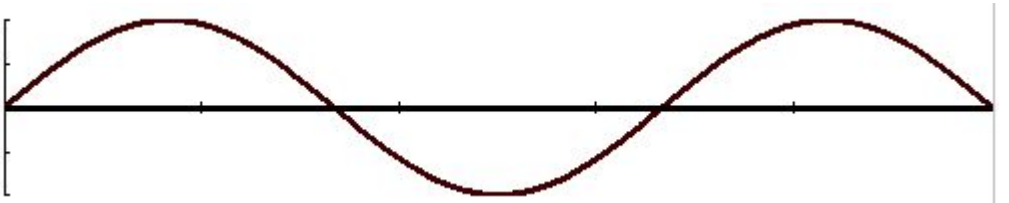
$$n = 1 \quad y = C_1 \sin \frac{\pi x}{L}$$



$$n = 2 \quad y = C_1 \sin \frac{2\pi x}{L}$$



$$n = 3 \quad y = C_1 \sin \frac{3\pi x}{L}$$



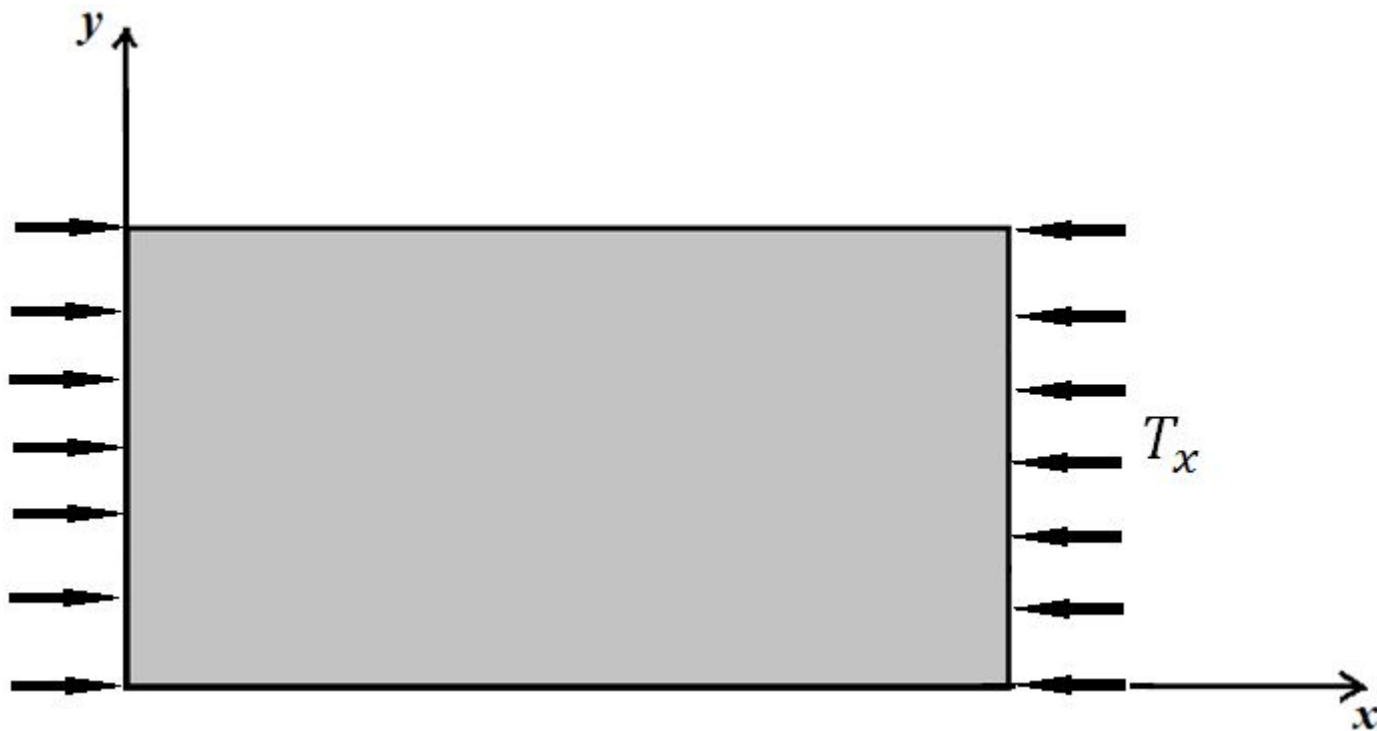
Устойчивость пластин

Дифференциальное уравнение изогнутой поверхности пластины при действии сил в срединной плоскости

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -\frac{1}{D} \left(-p + T_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + T_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial xy} + T_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (1)$$

Это уравнение следует использовать в том случае, если пластина, кроме поперечных нагрузок подвергается еще и действию сил в ее срединной плоскости.

Устойчивость прямоугольной пластины, свободно опертой по четырем сторонам и сжатой в одном направлении



Пластина свободно оперта по сторонам $x = 0, x = a, y = 0, y = b$

$$a > b$$

Вычислим, при каких значениях сжимающих сил пластина потеряет устойчивость.

Устойчивость прямоугольной пластины, свободно опертой по четырем сторонам и сжатой в одном направлении

Предположим, что выпучивание пластины происходит по уравнению

$$w = C \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \quad (2)$$

Уравнение (2) удовлетворяет граничным условиям

Проверим, удовлетворяет ли решение (2) исходному дифференциальному уравнению (1)

Дифференцируя уравнение (2) получаем:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{m^2 \pi^2}{a^2} w$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{m^4 \pi^4}{a^4} w$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{\pi^4}{b^4} w$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{m^2 \pi^4}{a^2 b^2} w$$

Устойчивость прямоугольной пластины, свободно опертой по четырем сторонам и сжатой в одном направлении

Учитывая, что в данном случае

$$T_y = T_{xy} = 0, \quad T_x = T_{кр} = 0$$

Подставляя производные в дифференциальное уравнение (1), получаем следующее тождество

$$\frac{m^4 \pi^4}{a^4} + 2 \frac{m^2 \pi^4}{a^2 b^2} + \frac{\pi^4}{b^4} = \frac{1}{D} T_{кр} \frac{m^2 \pi^2}{a^2}$$

Откуда

$$T_{кр} = \frac{\pi^2 D a^2}{m^2} \left(\frac{m^4}{a^4} + 2 \frac{m^2}{a^2 b^2} + \frac{1}{b^4} \right)$$

или

$$T_{кр} = \frac{\pi^2 D}{a^2} \left(m^2 + 2 \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^4}{b^4 m^2} \right) \quad (3)$$

Устойчивость прямоугольной пластины, свободно опертой по четырем сторонам и сжатой в одном направлении

$$T_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 D}{a^2} k$$

где

$$k = m^2 + 2 \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^4}{b^4 m^2}$$

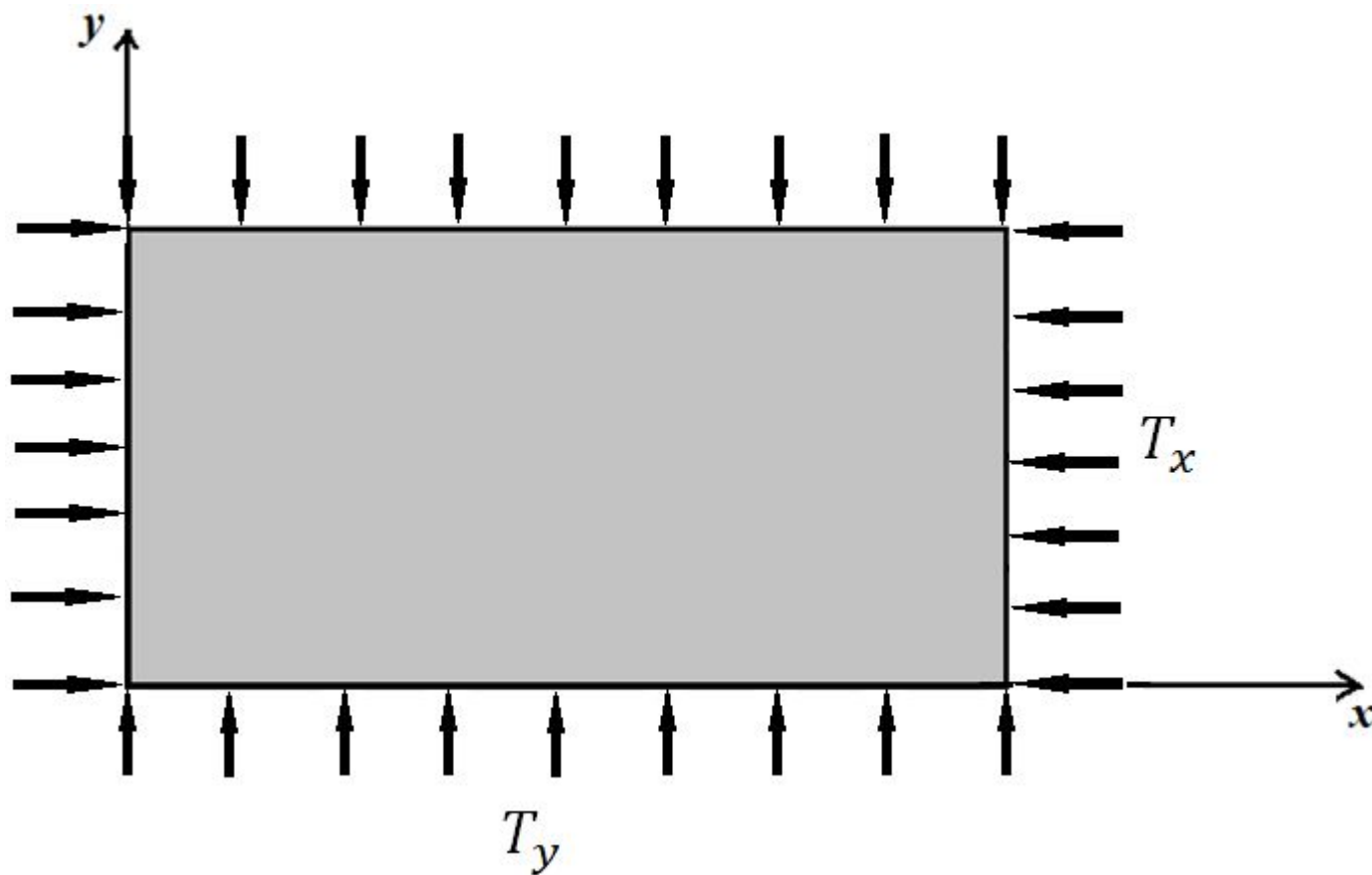
Остается исследовать выражение (3) на минимум. Учитываем, что по смыслу задачи m может принимать только целые положительные значения.

Для квадратной пластины ($a=b$) минимум получается только при

$$m = 1 \quad \Rightarrow \quad k = m^2 + 2 + \frac{1}{m^2}$$

$$k = 4 \quad \Rightarrow \quad T_{\text{кр}} = 4 \frac{\pi^2 D}{a^2}$$

Двустороннее сжатие прямоугольной пластины, свободно опертой по четырем сторонам



$$a > b$$

$$T_y = \alpha T_x$$

$$\alpha < 1$$

Пластина свободно оперта по сторонам $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$

Двустороннее сжатие прямоугольной пластины, свободно опертой по четырем сторонам

Предположим, что выпучивание пластины происходит по уравнению

$$w = C \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (4)$$

Дифференцируя (4) и подставляя в дифференциальное уравнение (1), получаем

$$\frac{m^4 \pi^4}{a^4} + 2 \frac{m^2 n^2 \pi^4}{a^2 b^2} + \frac{n^4 \pi^4}{b^4} = \frac{1}{D} \left[T_x \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \alpha T_x \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right]$$

Двустороннее сжатие прямоугольной пластины, свободно опертой по четырем сторонам

$$\begin{aligned} T_x &= \pi^2 D \frac{\frac{m^4}{a^4} + 2 \frac{m^2 n^2}{a^2 b^2} + \frac{n^4}{b^4}}{\frac{m^2}{a^2} + \alpha \frac{n^2}{b^2}} = \\ &= \pi^2 D \frac{\frac{a^2 b^2}{m^2 n^2} \cdot \left(\frac{m^4}{a^4} + 2 \frac{m^2 n^2}{a^2 b^2} + \frac{n^4}{b^4} \right)}{\frac{ab}{mn} \cdot \left(\frac{m^2}{a^2} + \alpha \frac{n^2}{b^2} \right)} \cdot \frac{\frac{m^2 n^2}{a^2 b^2}}{\frac{mn}{ab}} = \\ &= \pi^2 D \cdot \frac{mn}{ab} \cdot \frac{\left(\frac{m}{n} \cdot \frac{b}{a} \right)^2 + 2 + \left(\frac{n}{m} \cdot \frac{a}{b} \right)^2}{\left(\frac{m}{n} \cdot \frac{b}{a} + \alpha \frac{n}{m} \cdot \frac{a}{b} \right)} \end{aligned}$$

Двустороннее сжатие прямоугольной пластины, свободно опертой по четырем сторонам

Для квадратной пластины и одинаковых в двух направлениях усилиях последнее выражение упрощается и принимает следующий вид

$$T_{\text{кр}} = \pi^2 D \cdot \frac{2m^2}{a^2}$$

Наименьшее значение при $m = 1$

$$T_{\text{кр}} = 2 \cdot \frac{\pi^2 D}{a^2}$$

По сравнению с 1-м случаем значение критической нагрузки получается в 2 раза меньше

Устойчивость оболочек

1. Устойчивость цилиндрической оболочки при осевом сжатии

Дифференциальное уравнение для цилиндрической оболочки имеет следующий вид

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{Eh}{R^2} w = 0 \quad (5)$$

Граничные условия

Предположим, что края оболочки шарнирно оперты, т.е.

$$1) \text{ При } x = 0 \quad w = 0 \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

$$2) \text{ При } x = l \quad w = 0 \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

Устойчивость цилиндрической оболочки при осевом сжатии

Решение дифференциального уравнения (5), удовлетворяющего граничным условиям, будем искать в форме

$$w = C \sin \frac{m\pi x}{l} \quad \text{где} \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Подставляя это решение в дифференциальное уравнение, получим

$$C \left(D \frac{m^4 \pi^4}{l^4} - T \frac{m^2 \pi^2}{l^2} + \frac{Eh}{R^2} \right) \sin \frac{m\pi x}{l} = 0$$

$$D \frac{m^4 \pi^4}{l^4} - T \frac{m^2 \pi^2}{l^2} + \frac{Eh}{R^2} = 0$$

$$T = D \frac{m^2 \pi^2}{l^2} + \frac{Eh}{R^2} \cdot \frac{l^2}{m^2 \pi^2} \quad (6)$$

Устойчивость цилиндрической оболочки при осевом сжатии

Число полуволн m подбирается из условия минимума T .

$$T = D \frac{m^2 \pi^2}{l^2} + \frac{Eh}{R^2} \cdot \frac{l^2}{m^2 \pi^2}$$

Тонкие оболочки обычно теряю устойчивость с образованием большого числа полуволн.

Обозначив $\eta = \frac{m^2 \pi^2}{l^2}$

Можно записать $T = D\eta + \frac{Eh}{R^2} \cdot \frac{1}{\eta}$

Условно считаем параметр η изменяющимся непрерывно

Устойчивость цилиндрической оболочки при осевом сжатии

$$\frac{\partial T}{\partial \eta} = D - \frac{Eh}{R^2} \cdot \frac{1}{\eta^2} = 0$$

$$\frac{1}{\eta} = \sqrt{\frac{DR^2}{Eh}} \quad \eta_{\text{кр}} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{Eh}{D}}$$

$$m_{\text{кр}} = \frac{l}{\pi} \sqrt{\eta_{\text{кр}}} = \frac{l}{\pi} \frac{1}{\sqrt{R}} \sqrt[4]{\frac{Eh}{D}}$$

$$m_{\text{кр}} = \frac{l}{\pi R} \sqrt[4]{\frac{EhR^2}{D}}$$

Устойчивость цилиндрической оболочки при осевом сжатии

$$\begin{aligned}T &= D\eta + \frac{Eh}{R^2} \cdot \frac{1}{\eta} & \eta_{\text{кр}} &= \frac{1}{R} \sqrt{\frac{Eh}{D}} \\T_{\text{кр}} &= D \cdot \frac{1}{R} \sqrt{\frac{Eh}{D}} + \frac{Eh}{R^2} \cdot R \sqrt{\frac{D}{Eh}} = \frac{2}{R} \sqrt{DEh} \\T_{\text{кр}} &= \frac{1}{\sqrt{3(1-\mu^2)}} \cdot \frac{Eh^2}{R} \\ \sigma_{\text{кр}} &= \frac{T_{\text{кр}}}{h} = \frac{1}{\sqrt{3(1-\mu^2)}} \cdot \frac{Eh}{R} = k \cdot \frac{Eh}{R} \tag{7}\end{aligned}$$

Эта формула впервые была получена Лоренцем и Тимошенко

$$\mu = 0.3 \quad \sigma_{\text{кр}} = 0,605 \cdot \frac{Eh}{R}$$

Устойчивость цилиндрической оболочки при осевом сжатии

Экспериментальные исследования, выполненные русскими и зарубежными учеными, не подтвердили результатов, следующих из решения (7).

Критические напряжения оказываются значительно ниже теоретических, причем чем меньше относительная толщина оболочки, тем различие больше.

| R/h | 250 | 500 | 750 | 1000 | 1500 |
|------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| k | 0,18 | 0,14 | 0,12 | 0,10 | 0,09 |

Устойчивость цилиндрической оболочки при осевом сжатии

Влияние внутреннего давления на коэффициент устойчивости

$$k_p = \frac{1 + 0,21\alpha(R/h)^{0,6}}{1 + 3\alpha} \quad \alpha = \frac{pR^2}{Eh^2}$$

$$k' = k_{\text{э}} \cdot k_p$$

$$p = 0 \quad k_p = 1$$

$$p \neq 0 \quad k_p > 1$$

$$R/h = 500 \quad \alpha = 1 \quad \Rightarrow \quad k_p = 2,5$$

$$R/h = 2000 \quad \alpha = 1 \quad \Rightarrow \quad k_p = 5,2$$

Устойчивость цилиндрической оболочки при равномерном внешнем давлении

Для оболочки средней длины

$$\sqrt{\frac{h}{R}} < \frac{l}{R} < 0,3 \sqrt{\frac{R}{h}}$$

Формула оболочки Саутуэлла-Папковича

$$p_{\text{кр}} = 0,856 \frac{E}{1 - \mu^2} \frac{R}{l} \left(\frac{h}{R}\right)^{5/2}$$

$$\mu = 0,3 \quad p_{\text{кр}} = 0,92E \frac{R}{l} \left(\frac{h}{R}\right)^{5/2}$$

В расчетах

$$p_{\text{кр}} = 0,64E \frac{R}{l} \left(\frac{h}{R}\right)^{5/2}$$

Устойчивость сферической оболочки при внешнем давлении

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{1}{\sqrt{3(1 - \mu^2)}} \cdot \frac{Eh}{R} = 0,605 \cdot \frac{Eh}{R}$$

| | | | | | |
|------------|-------------|-------------|-------------|-------------|--------------|
| R/h | | 500 | 750 | 1000 | 1500 |
| k | 0,15 | 0,12 | 0,10 | 0,08 | 0,075 |

**Спасибо
за внимание!**