Основы математической статистики

Математическая статистика позволяет обрабатывать результаты опытов, измерений и т. д. Математическая статистика использует методы теории вероятности.

Случайные события

- Событие называется *детерминированным*, если в результате опыта оно происходит или не происходит наверняка. В детерминированном случае мы точно знаем, что данная причина приведет к единственному, вполне определенному следствию.
- Событие называется *случайным*, если в результате опыта мы не можем заранее предсказать - произойдет событие или нет. При этом предполагается, что опыт можно повторять неограниченное число раз при неизменных условиях.

- События A и B называются *несовместными*, если появление одного исключает появление другого.
- Событие B *следует* из события A, если событие B происходит всегда, когда произошло событие A .

  Это обозначается тем же символом, что и подмножество: $A \subset B$.
- Будем говорить о равенстве двух событий A и B, если из A следует B и из B следует A.
- Событие называется *невозможным*, если оно не может произойти никогда при данных условиях.
- Событие называется *достоверным*, если оно происходит всегда при данных условиях.

- Пусть случайный эксперимент проводится раз n, и событие A произошло m раз. Тогда говорят, что *относительная частота* события A есть $v(A)=m/n$.
- Частота события связана с его вероятностью. Относительную частоту называют еще *эмпирической вероятностью* потому, что по частоте события мы оцениваем возможность его появления в будущем.
- *Для любого случайного события A*

$$0 \le P_n(A) \le 1$$

n - количество случайных экспериментов.

Две теоремы о вероятности суммы событий и произведении

1. Если события несовместны, то вероятность суммы событий равна сумме вероятностей:

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

2. Если события независимы, то вероятность произведения событий равна произведению вероятностей:

$$P(A\,B) = P(A)\,P(B)$$

Классическое определение

- *Вероятностью P(A)* события называется отношение числа благоприятных исходов *m(A) к* общему числу несовместных равновозможных исходов:

$$P(A) = \frac{m(A)}{N}$$

Свойства вероятности.

- I. *Для любого случайного события A* $0 \leq P(A) \leq 1$
- 2. *Пусть события A и B несовместны. Тогда* $P(A+B)=P(A)+P(B)$

Например: бросание кубика. Всего исходов 6, число исходов, благоприятных выпадению четного числа – 3. P(A)=1/2

Дискретная случайная величина

$$\begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}, \quad p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$$

Будем предполагать, что все числа x_k различны.
Случайная величина принимает значение x_k, если произошел исход ω_k, вероятность которого равна p_k
Точнее: вероятность события $\{\xi(\omega_k)=x_k\}$ равна p_k
Дискретная случайная величина полностью определяется своими значениями и их вероятностями.

Дисперсия

Дисперсией конечной случайной величины ξ называется число

$$D\xi = M\left(\xi - M\xi\right)^2$$

по определению математического ожидания, дисперсия вычисляется по следующей формуле

$$D\xi = \sum_i \left(x_i - M\xi\right)^2 p_i$$

Дисперсию иногда обозначают как $\sigma^2(\xi)$ или σ_ξ^2

$\sigma_\xi = \sqrt{D\xi}$ называется *среднеквадратичным отклонением* или *стандартным отклонением* случайной величины

Функция распределения

Функция действительной переменной

$$F_\xi(x) = P(\xi < x)$$

называется *функцией распределения* случайной величины ξ .

Свойства функции распределения

1. $$P(\xi \geq x) = 1 - F_\xi(x)$$

2. $$P(a \leq \xi < b) = F_\xi(b) - F_\xi(a)$$

3. При любом x выполняется неравенство.

$$0 \leq F_\xi(x) \leq 1$$

Это справедливо, поскольку функция распределения есть вероятность

4. Функция распределения есть неубывающая функция.

5. При $x \to -\infty$ событие стремится к невозможному и вероятность соответственно, стремится к нулю. При $x \to +\infty$ событие становится достоверным

6. Функция распределения непрерывна слева, то есть

$$\lim_{x \to x_0 + 0} F_\xi(x) = F_\xi(x_0)$$

Случайная величина ξ называется *непрерывной случайной величиной,* если существует функция $f_\xi(x)$ такая, что

$$P(\xi \in [a,b]) = \int_a^b f_\xi(x)dx$$

Функция $f_\xi(x)$ называется плотностью *вероятности* или *плотностью распределения* случайной величины ξ

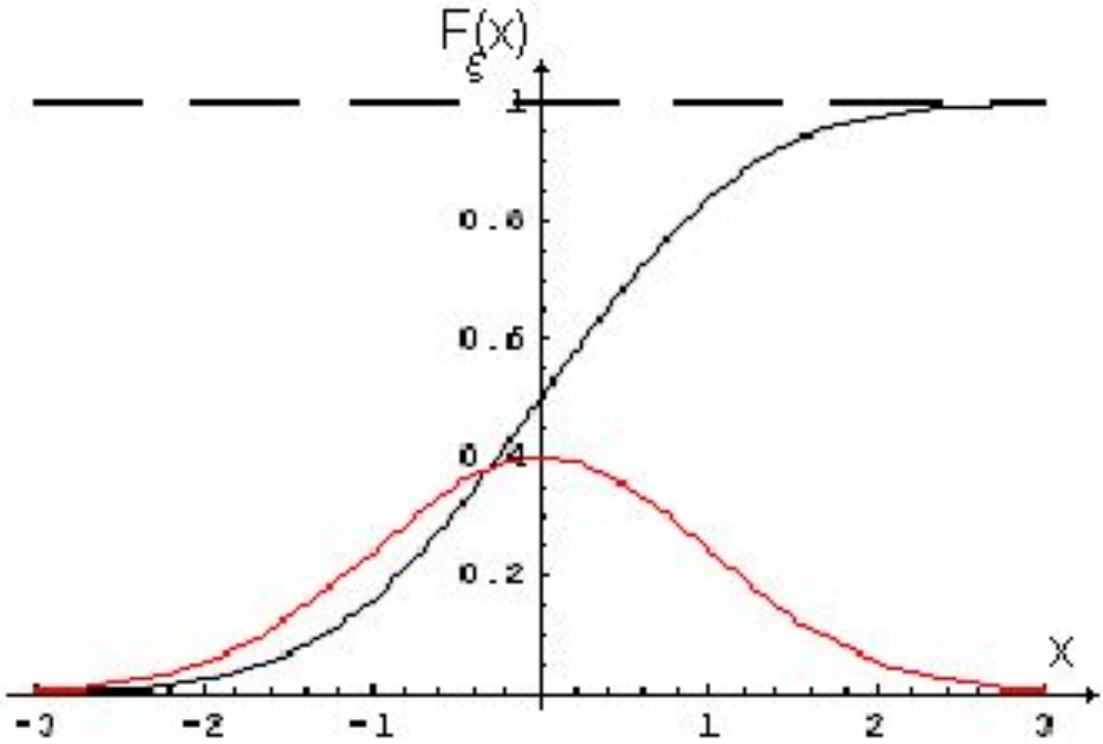
Распределение Гаусса

Говорят, что случайная величина ξ , распределена по *нормальному закону* (имеет *нормальное распределение)* с параметрами m и σ, (σ>0) если она имеет плотность распределения

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

$$F_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt$$

На рисунке представлены графики стандартного (при m=0 и s=1) нормального распределения Гаусса (черный) и его плотности (красный)



Статистика

- Генеральной совокупностью называется вся совокупность исследуемых объектов
- Выборочной совокупностью или просто выборкой называют совокупность случайно отобранных из генеральной совокупности объектов
- Объемом совокупности называют число объектов этой совокупности

Способы формирования выборочной совокупности

- Повторный – после измерений объект возвращают в генеральную совокупность
- Бесповторный – после измерений объект в генеральную совокупность не возвращается

Выборка должна быть репрезентативной - представительной. Для этого объекты из генеральной совокупности должны отбираться случайно.

Выборка и ее обработка

- Упорядочивание. Элементы выборки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ располагаются в порядке возрастания.
- Частотный анализ. Пусть выборка содержит k различных значений $z_1, z_2, \ldots, z_k$, причем z_i встречается n_i (i=1,2,…,k) Число n_i называют частотой элемента z_i,

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = n$$

- Совокупность пар (z_i, n_i) называют статистическим рядом выборки. Часто его представляют в виде таблицы – в первой строке z_i, во второй n_i.
- Величина $v_i = n_i / n$ называется относительной частотой
- Накопленная частота значения z_i равна $n_1+n_2+\ldots+n_i$.
- Относительная накопленная частота $v_1+v_2+\ldots+v_i$

Эмпирическая функция распределения

Каждой выборке $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ можно поставить в соответствие конечную случайную величину, принимающую эти значения с равными вероятностями 1/n

$$\xi_n = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ 1/n & 1/n & \dots & 1/n \end{pmatrix}$$

Это распределение называется *выборочным, или эмпирическим, распределением.* Как и для любой конечной случайной величины, для эмпирической случайной величины можно построить ступенчатую функцию распределения; она называется *выборочной функцией распределения.* Кроме того, можно вычислить числовые характеристики выборочной случайной величины ξ_n- математическое ожидание, дисперсию.

выборочное математическое ожидание (его обычно называют *выборочным средним), выборочная дисперсия, выборочная медиана* и т.д. Например, выборочное среднее (его обозначают через) есть не что иное как среднее арифметическое значений выборки $\bar{x}$

$$M\xi_n = \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

Соответственно выборочная дисперсия s^2 равна

$$D\xi_n = s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2$$

ОЦЕНКА ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть в нашем распоряжении имеется выборка $\{x_1, x_2, ...x_n\}$ из генеральной совокупности с функцией распределения *F(x)*. Функция распределения $F_n^*(x)$ эмпирической случайной величины

$$\xi_n = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ 1/n & 1/n & & 1/n \end{pmatrix}$$

Поскольку каждое значение из выборки есть случайная величина с функцией распределения, то вероятность успеха равна $p=F(x)$. Число успехов равно $\mu_n(x)$, а относительная частота успеха равна $\mu_n(x)/n$ и совпадает с выборочной функцией распределения.

Следовательно, выборочная функция распределения представляет собой относительную частоту успеха, а функция распределения генеральной совокупности - вероятность успеха. Из предыдущего нам известно, что относительная частота есть несмещенная состоятельная оценка вероятности. Значит, выборочная функция распределения действительно является несмещенной, состоятельной и эффективной оценкой функции распределения:

$$MF_n^*(x) = F(x)$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|F_n^*(x) - F(x)\right| < \varepsilon\right) = 1$$

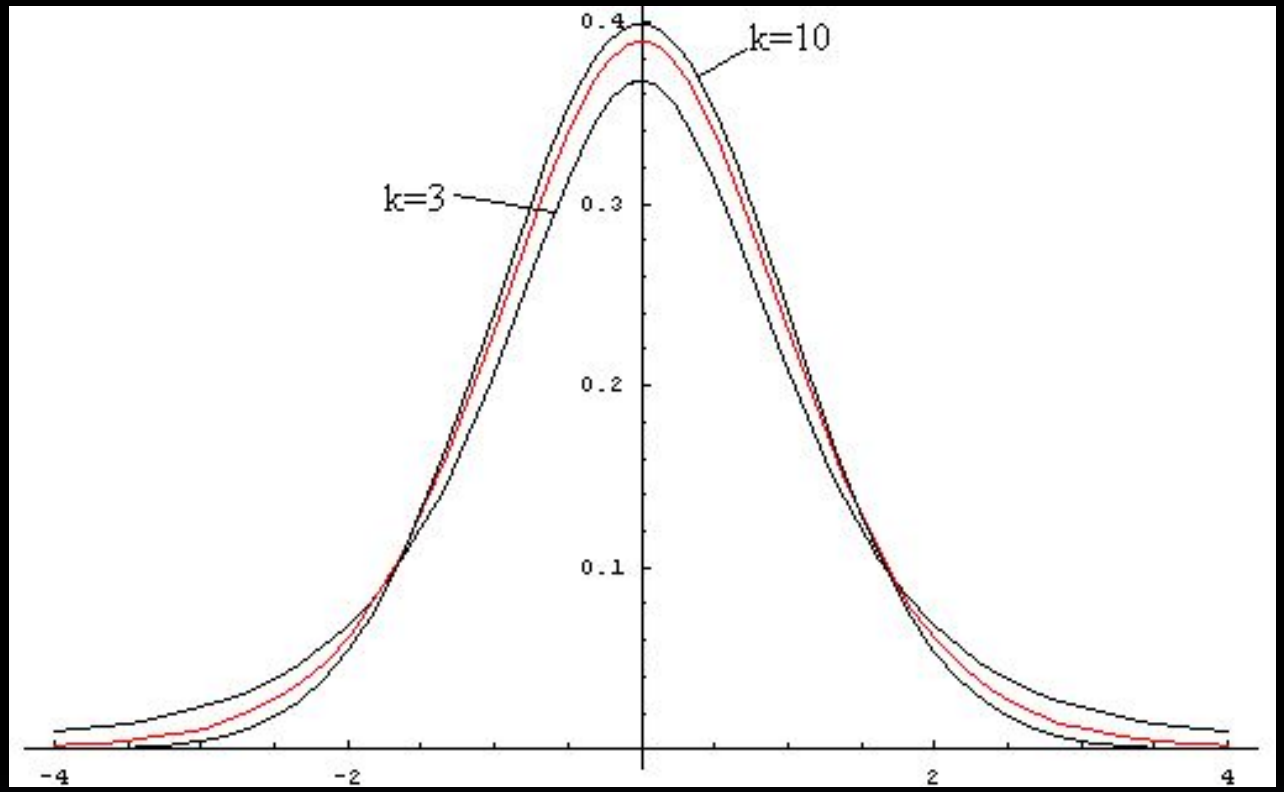
Выборочные квантили

Выборочный квантиль определяются по выборке.

- Квантиль – левее должно располагаться кол-во значений, соответствующее индексу квантили. Например, для квантили $x_{0.8}$

Левее должно располагаться 80% значений выборки.

Распределение Стьюдента



На рисунке красным выделено нормальное распределение, черным – распределение Стьюдента.

Свойства распределения Стьюдента

- *Распределение Стьюдента симметрично, причем Mt(k) = 0.*
- *При больших k распределение Стьюдента близко к стандартному нормальному распределению N(0,*1).

Доверительный интервал математического ожидания.

Случайная величина U распределена по нормальному закону

$$\frac{\bar{x}-m}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

Случайная величина

$$\frac{\bar{x}-m}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

распределена по закону Стьюдента, а доверительный интервал математического ожидания примет вид (τ_α - квантиль распределения Стьюдента, $\alpha = (1+\gamma)/2$)

$$\left(\bar{x} - \tau_\alpha \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \tau_\alpha \frac{S}{\sqrt{n}} \right)$$

Пример

Вычислим доверительные интервалы для нашей выборки.

Интервал для математического ожидания. Случай 1. Будем считать, что несмещенная оценка дисперсии – точное значение.

Выберем уровень значимости $\gamma = 0.95$. По таблице найдем квантиль стандартного распределения $u_{0.975} = 1.96$. Подставим в формулу

$$u_{(1+\gamma)/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

m=0.51735, σ=0,288955, n=49. После вычислений получим 0,0809074.

Интервал будет 0.51735- 0,0809074<m< 0.51735+ 0,0809074

0,4364426<m<0,5982574.

Пример. Интервал для дисперсии

S^2=0,083495

$$\frac{S^2(n-1)}{\chi^2_{(1+\gamma)/2}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{S^2(n-1)}{\chi^2_{(1-\gamma)/2}(n-1)}$$

Находим квантили распределения $\chi^2_{(1+\gamma)/2}$ и $\chi^2_{(1-\gamma)/2}$.

$\chi^2_{0.975} = 71.4$ $\chi^2_{0.025} = 42.85$

Находим интервал 0,056131<σ^2<0,09353

Интервал для математического ожидания. Случай 2.

Используем распределение Стьюдента. Формула та же, что и раньше, но вместо квантиля нормального распределения используется квантиль распределения Стьюдента. $t(48)_{0.975} = 2.0105$

После вычислений получим

0.51735- 0,082992 <m< 0.51735+ 0,082992

0,434358<m<0,600342

Статистическая гипотеза

- Любое утверждение о виде или свойствах закона распределения наблюдаемых случайных величин
- Всякий раз предполагаем, что у нас имеются две взаимоисключающие гипотезы:

основная и альтернативная

Нулевой (**основной**) гипотезой - H_0 называют какое-либо конкретное предположение о теоретической функции распределения или предположение, влекущее за собой важные практические последствия

Альтернативная гипотеза H_1 - любая гипотеза, исключающая нулевую

Задача проверки статистической гипотезы состоит в том, чтобы, используя статистические данные (выборку)

$$X_1, X_2, \ldots, X_n,$$

принять или отклонить нулевую гипотезу

Нулевые и альтернативные гипотезы формулируются как утверждение о принадлежности функций распределения некоторой случайной величины определенному классу распределений

$$\Phi_0, \Phi_1 \in \Phi, \quad \Phi_0 \cup \Phi_1 = \Phi$$

$$\Phi_0 \cap \Phi_1 = \varnothing$$

$$H_0 : F_x \in \Phi_0; \quad H_1 : F_x \in \Phi_1$$

Гипотеза называется простой, если соответствующий класс распределений содержит лишь одно распределение, в противном случае гипотеза будет сложной.

Гипотезы о параметрах распределений называются параметрическими

Статистикой критерия

называется функция от выборки

$$T(X) \in \tau$$

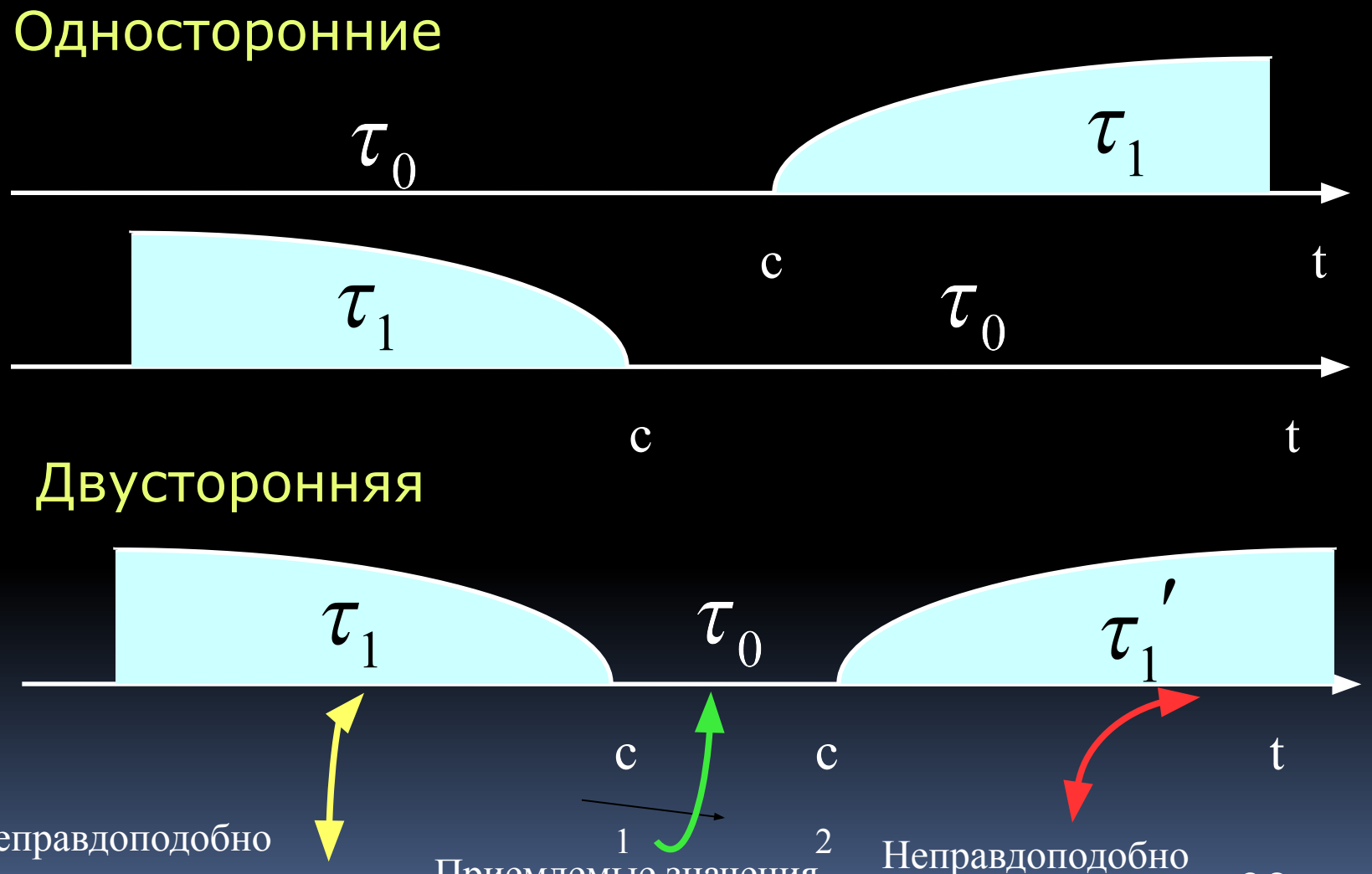
значение которой для заданной выборки служит основанием принятия или отклонения основной гипотезы

- **Статистический критерий** - правило, позволяющее только по результатам наблюдений
  - $X_1, X_2, ..., X_n$
- принять или отклонить нулевую гипотезу H_o

Каждому критерию отвечает разбиение области значений *статистики критерия* на две непересекающихся части:

- ***критическую область*** τ_1
- ***область принятия гипотезы*** τ_0

Критические области



32

Если значение статистики критерия попадает в область принятия гипотезы τ_0 , то принимается *нулевая* гипотеза, в противном случае она отвергается (принимается *альтернативная* гипотеза)

Задать статистический критерий значит:

- задать статистику критерия
- задать критическую область

В ходе проверки гипотезы H_0 можно прийти к правильному выводу, либо совершить два рода ошибок:

- ошибку первого рода -- отклонить H_0, когда она верна
- ошибку второго рода -- принять H_0, когда она не верна.

Так как статистика критерия $T(X) \in \tau$ есть случайная величина со своим законом распределения, то попадание её в ту или иную область характеризуется соответствующими вероятностями:

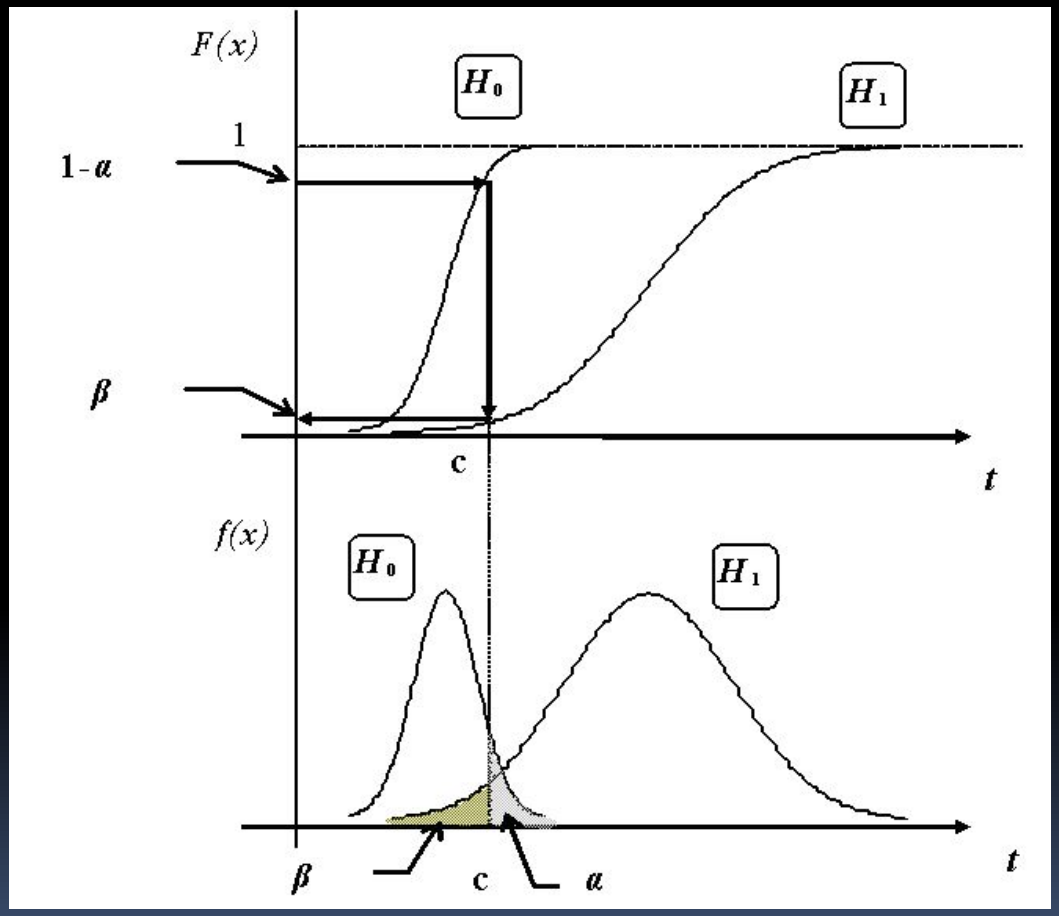
- вероятностью ошибки первого рода α
- вероятностью ошибки второго рода β

Ошибку первого рода α ещё называют уровнем значимости критерия.

Часто пользуются понятием мощности критерия W -- вероятности попадания в критическую область при условии справедливости альтернативной гипотезы

$$W = 1 - \beta$$

Распределение статистики критерия для нулевой и альтернативной гипотез (односторонний критерий)



Пять шагов проверки гипотезы

- 1 шаг – выдвигается основная гипотеза H_0
- 2 шаг – задается уровень значимости α
- 3 шаг – задается статистика критерия $T(X)$ с известным законом распределения

- 4 шаг – из таблиц распределения статистики критерия находятся квантили, соответствующие границам критической области
- 5 шаг – для данной выборки рассчитывается значение статистики критерия

Если значение статистики критерия попадает в область принятия гипотезы, то нулевая гипотеза принимается на уровне значимости α.

В противном случае принимается альтернативная гипотеза (отвергается нулевая гипотеза)

Пример: На основании сделанного прогноза средняя дебиторская задолженность однотипных предприятий региона должна составить a_0 =120 ден, ед. выборочная проверка 10 предприятий установила, что средняя задолженность $\bar{x}$ =135 ден.ед. s= 20 ден.ед.

На уровне значимости α=0,05 выяснить можно ли принять данный прогноз.

Решение:

Для проверки нулевой гипотезы H_0: a_0=120

при альтернативной H_1: a_1=135 построим статистику

$$t = \frac{\overline{X} - a_0}{S}\sqrt{n-1} = \frac{135-120}{20}\sqrt{10-1} = 2{,}25,$$

$\alpha_1 > \alpha_0$ строим правостороннюю критическую область

$t_{kp}(2\alpha, n-1) = St^{-1}(2\alpha, n-1)$

$t_{kp}(2 \cdot 0{,}05, n-1) = t_{kp}(0{,}1;9) = 1{,}83$

$t_{набл} > t_{kp}$ H_0 отвергаем, т.е на 5% уровне значимости сделанный прогноз должен быть отвергнут.