Издательство «Легион»

«Экономическая» задача в ЕГЭ по математике (профильный уровень № 17)

Фридман Елена Михайловна

Задача.

15-го января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн рублей. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где r – **целое** число;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

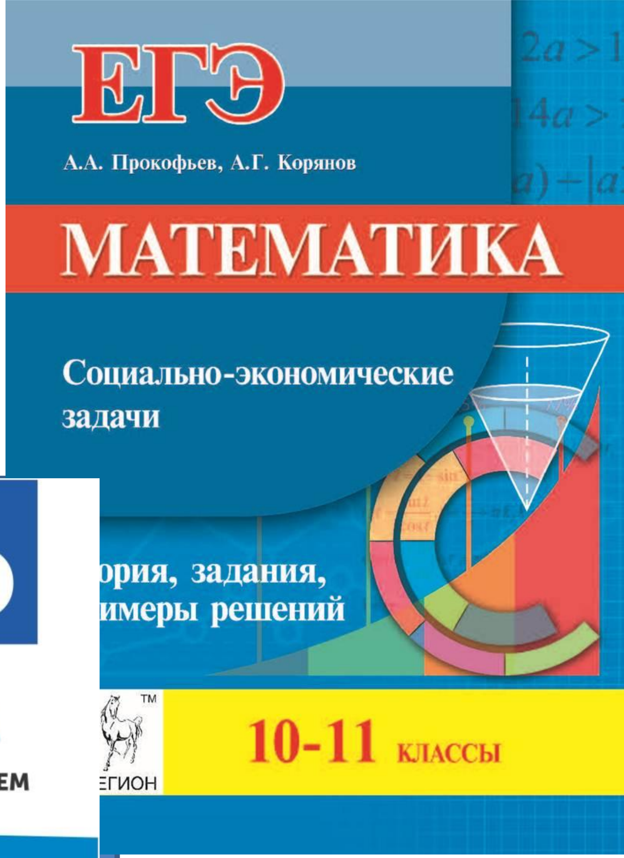
Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн рублей)	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0

Найдите наименьшее значение r, при котором общая сумма выплат будет больше 1,2 млн рублей.

Из материалов аналитического отчета ФИПИ

В 2016 году произошел заметный рост выполнения заданий повышенного уровня сложности с развернутым ответом (ненулевой балл получили свыше половины участников): алгебраического задания 13 – решение тригонометрического уравнения с отбором корней (2015 г. – 27,4%, 2016 г. – 38,9%) и практико-ориентированного задания 17 – решение текстовой задачи с экономическим содержанием (2015 г. – 2,3%, 2016 г. – 13%). Эти изменения свидетельствуют о качественном обучении математике в старшей школе и более четкой подготовке обучающихся к обучению в вузе.

- Задачи на оптимальный выбор
- Банки, вклады, кредиты
- Производственные задачи



Кодификатор
требований к уровню подготовки выпускников образовательных организаций для проведения единого государственного экзамена по МАТЕМАТИКЕ

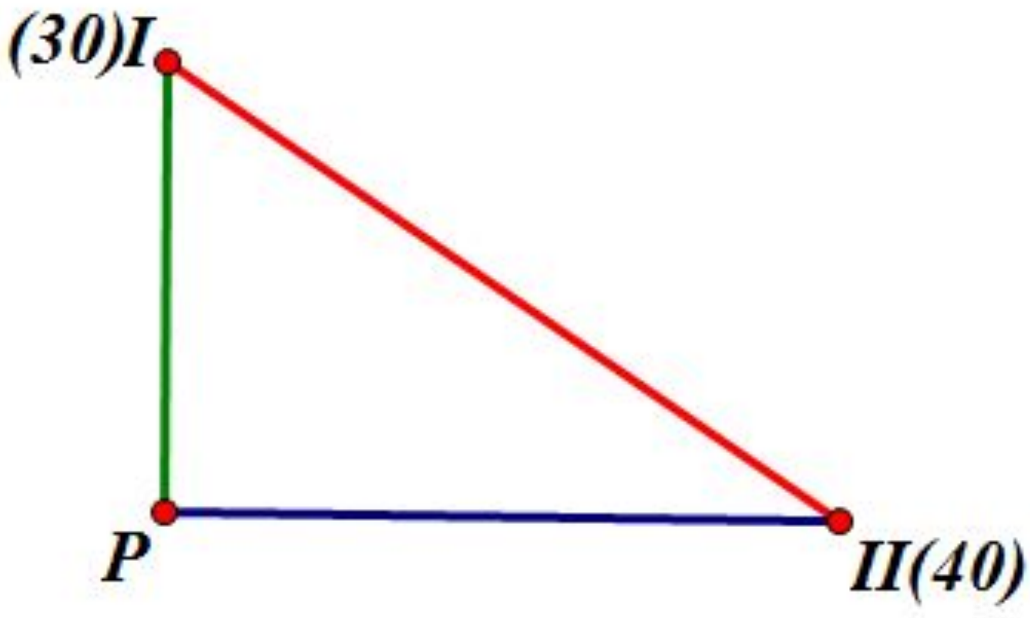
Код разде-ла	Код контролиру-емого требования (умения)	Требования (умения), проверяемые заданиями экзаменационной работы
5		**Уметь строить и исследовать простейшие математические модели**
	5.1	Моделировать реальные ситуации на языке алгебры, составлять уравнения и неравенства по условию задачи; исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры
	5.2	Моделировать реальные ситуации на языке геометрии, исследовать построенные модели с использованием геометрических понятий и теорем, аппарата алгебры; решать практические задачи, связанные с нахождением геометрических величин
	5.3	Проводить доказательные рассуждения при решении задач, оценивать логическую правильность рассуждений, распознавать логически некорректные рассуждения
	5.4	Моделировать реальные ситуации на языке теории вероятностей и статистики, вычислять в простейших случаях вероятности событий

Задача 1

Два велосипедиста равномерно движутся по взаимно перпендикулярным дорогам по направлению к перекрестку этих дорог. Один из них движется со скоростью 40 км/ч и находится на расстоянии 5 км от перекрестка, второй движется со скоростью 30 км/ч и находится на расстоянии 3 км от перекрестка.

Через сколько минут расстояние между велосипедистами станет наименьшим? Каково будет это наименьшее расстояние?

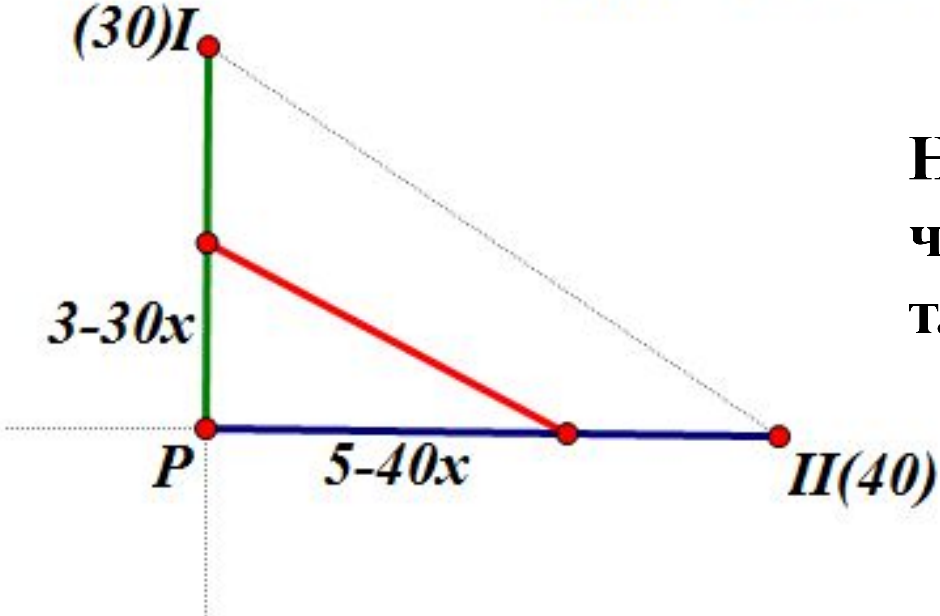
Решение.



Способ 1

$$f(x)=(3-30x)^2+(5-40x)^2$$

$$f(x)=2500x^2-580x+34 \quad x=\frac{580}{5000}=\frac{58\cdot 2}{500\cdot 2}=0,116$$



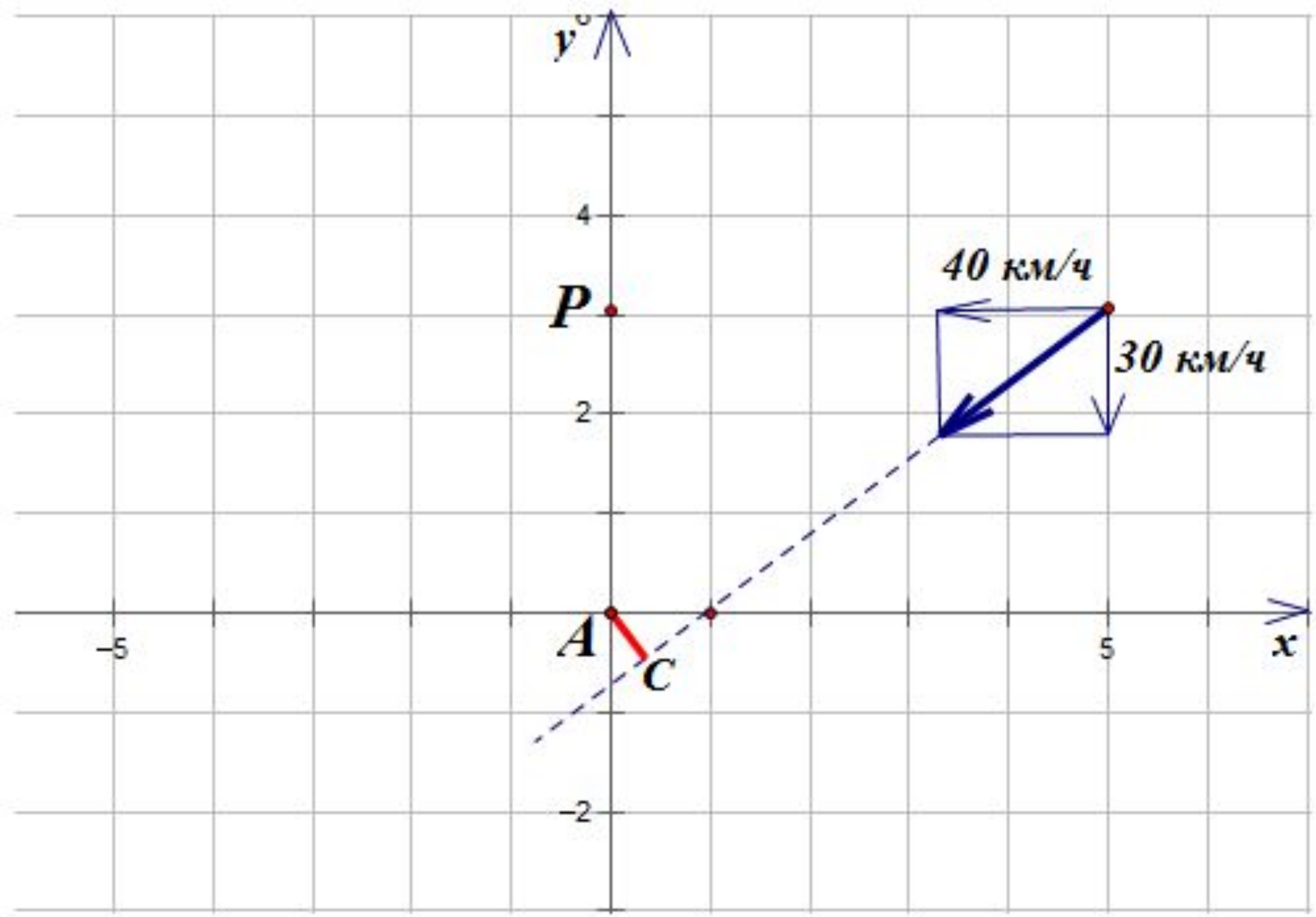
Наименьшим расстояние станет через 0,116 часа, т.е через 6,96 минут.

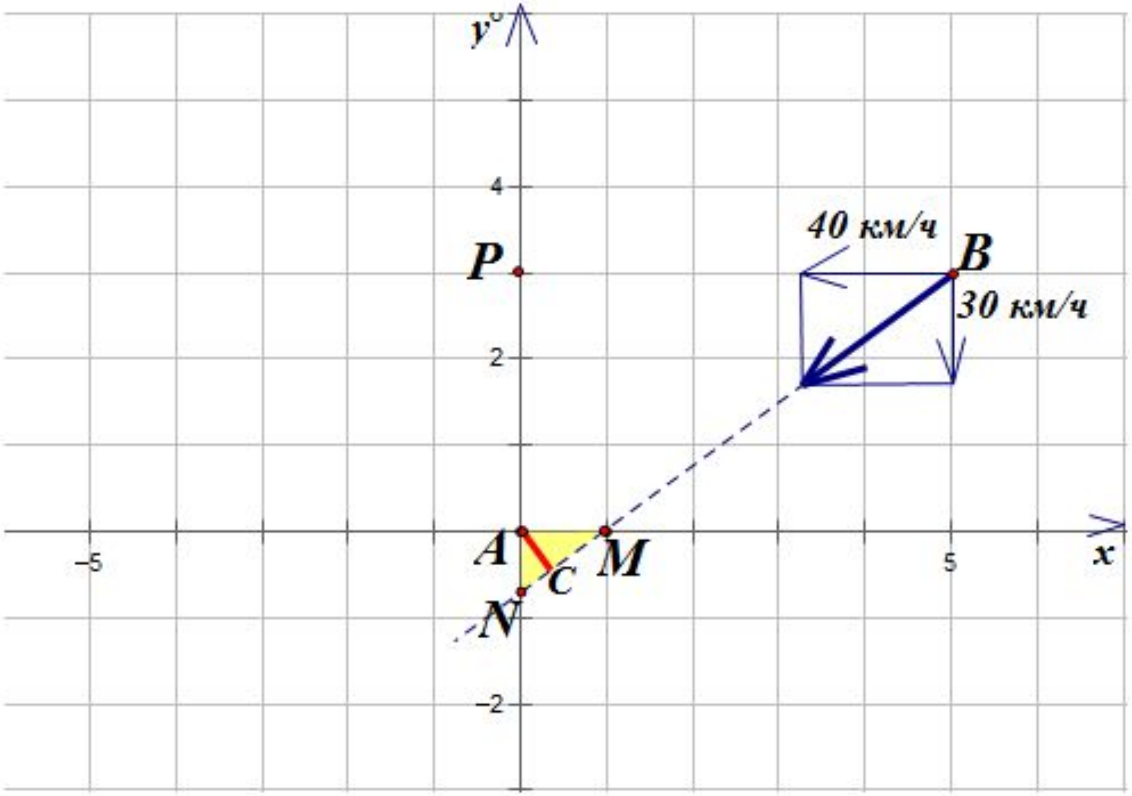
$$f(x)=(3-3,48)^2+(5-4,64)^2$$

$$f(x)=0,48^2+0,36^2=\frac{48^2+36^2}{100^2}=\frac{12^2(3^2+4^2)}{100^2}=0,6^2$$

Наименьшее расстояние равно 0,6.

Способ 2





$M(1;0)$

$B(5;3)$

$$\frac{x-1}{5-1}=\frac{y-0}{3-0}$$

$$4y=3(x-1)$$

$$y=\frac{3}{4}(x-1)$$

$$y(0)=-\frac{3}{4}$$

$$AN=\frac{3}{4}$$

$$AM=1$$

$$AC=\frac{AN\cdot AM}{MN}$$

$$NM=\sqrt{1+\frac{9}{16}}=\frac{5}{4}$$

$$AC=\frac{3}{5}=0{,}6$$

Кодификатор
требований к уровню подготовки выпускников образовательных организаций для проведения единого государственного экзамена по МАТЕМАТИКЕ

Код раздела	Код контролируемого требования (умения)	Требования (умения), проверяемые заданиями экзаменационной работы
	6.1	Анализировать реальные числовые данные, информацию статистического характера; осуществлять практические расчеты по формулам; пользоваться оценкой и прикидкой при практических расчетах
	6.2	Описывать с помощью функций различные реальные зависимости между величинами и интерпретировать их графики; извлекать информацию, представленную в таблицах, на диаграммах, графиках
	6.3	Решать прикладные задачи, в том числе социально-экономического и физического характера, на наибольшие и наименьшие значения, на нахождение скорости и ускорения

Задача 2

У фермера есть два поля площадью 10 га. На каждом поле можно выращивать картофель и свеклу. Поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 300 ц/га, а на втором - 200 ц/га Урожайность свеклы на первом поле составляет 200 ц/га, а на втором – 300 ц/га.

Фермер может продавать картофель по цене 10 000 р/ц, а свеклу – по цене 13 000 р/ц. Какой наибольший доход может получить фермер?

Решение.

1 поле	S	Урожай	Выручка
картофель	x га	300 x ц	$10\,000 \cdot 300x = 3 \cdot 10^6 x$ р
свёкла	10 – x га	200(10 – x) ц	$13\,000 \cdot 200(10 - x)$р $=$ $26 \cdot 10^6 - 26 \cdot 10^5 x$ р
Всего			$26 \cdot 10^6 - 26 \cdot 10^5 x + 3 \cdot 10^6 x$ р

2 поле	S	Урожай	Выручка
картофель	y га	200 y ц	$10\,000 \cdot 200x = 2 \cdot 10^6 y$ р
свёкла	10 – y га	300(10 – y) ц	$13\,000 \cdot 300(10 - y)$р $=$ $39 \cdot 10^6 - 39 \cdot 10^5 y$ р
Всего			$39 \cdot 10^6 - 39 \cdot 10^5 y + 3 \cdot 10^6 y$ р

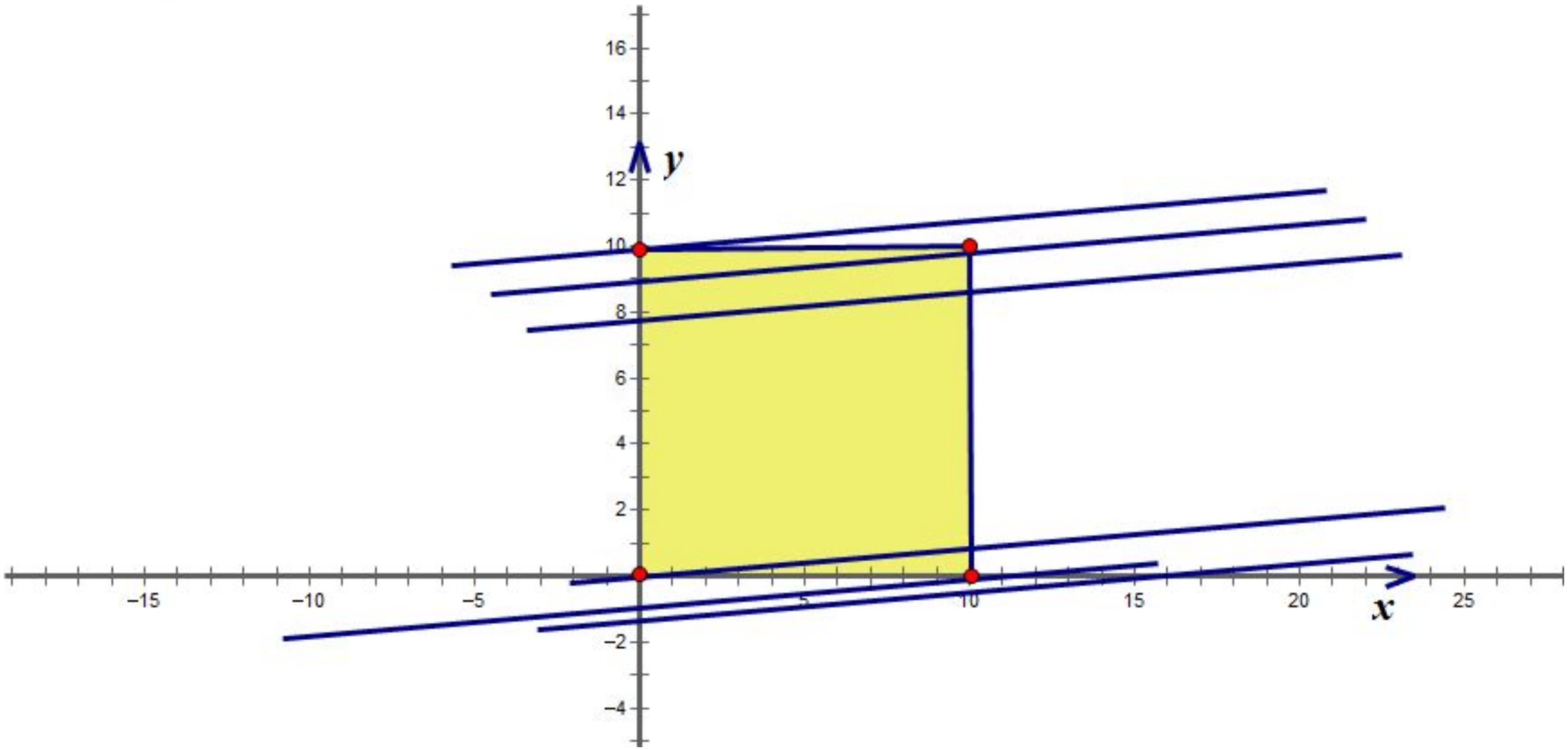
Общий доход:

$$26 \cdot 10^6 - 26 \cdot 10^5 x + 3 \cdot 10^6 x + 39 \cdot 10^6 - 39 \cdot 10^5 y + 3 \cdot 10^6 y =$$

$$= 10^5 (\underline{4x - 19y \overset{c}{+} 650})\ \text{р}$$

c=4x-19y+650. **Наибольшее *c* - ?**

$y = \frac{4}{19}x + \frac{650-c}{19}$. Заметим $x \in [0; 10]$, $y \in [0; 10]$ – это квадрат со стороной 10.



Чем больше с, тем ниже прямая. Подставим координаты точки (10;0) в уравнение прямой и найдем наибольшее с=690, тогда $c \cdot 10^5 = 690 \cdot 10^5 = 69000000$ рублей.

Задача 3

Предприниматель купил здание и собирается открыть в нем отель.

В отеле могут быть стандартные номера площадью 21 квадратный метр и номера «люкс» площадью 49 квадратных метров.

Общая площадь, которую можно отвести под номера, составляет 1099 квадратных метров.

Предприниматель может поделить эту площадь между номерами различных типов как хочет.

Обычный номер будет приносить отелю 2000 рублей в сутки, а номер «люкс» 4500 рублей в сутки.

Какую наибольшую сумму денег сможет заработать в сутки на своем отеле предприниматель?

Решение.

Пусть в отеле x обычных номеров и y номеров «люкс»

$21x+49y=1099.$

$f(x,y)= 2000x+4500y=500(4x+9y).$ fнаиб- ?

$$x=\frac{1099-49y}{21} \qquad f(y)=500(4\cdot\frac{1099-49y}{21}+9y)=500(\frac{4396}{21}-\frac{1}{3}y)$$

$f(y)$ – убывающая. $1099-49y\geq 21$ $y\leq 22$

Если $y=1$, то $x=50.$

fнаиб$=f(50)=2000\cdot 50+4500\cdot 1=104500$ (руб.)

Задача 4

Вкладчик положил две одинаковые суммы под r % годовых в банки «А» и «Б».

Через год условия по вкладу «А» изменились, и он понизил годовую ставку до 8 % годовых, в то время как банк «Б» оставил годовую ставку на прежнем уровне.

Найдите, при каком наименьшем целом r вклад в банке «Б» через три года будет по крайней мере на 16 % больше, чем вклад в банке «А».

Решение.

Годы	Вклад в банк «А»			Вклад в банк «Б»		
	%	Сумма в начале года	Сумма в конце года	%	Сумма в начале года	Сумма в конце года
1	r	n	$(1+\frac{r}{100})n$	r	n	$(1+\frac{r}{100})n$
2	8	$(1+\frac{r}{100})n$	$(1+\frac{r}{100})(1+\frac{8}{100})n$	r	$(1+\frac{r}{100})n$	$\left(1+\frac{r}{100}\right)^2 n$
3	8	$(1+\frac{r}{100})(1+\frac{8}{100})n$	$(1+\frac{r}{100})(1+\frac{8}{100})^2 n$	r	$\left(1+\frac{r}{100}\right)^2 n$	$\left(1+\frac{r}{100}\right)^3 n$

$$n(1+\frac{r}{100})^3 \geq \frac{116}{100}(1+\frac{r}{100})(1+\frac{8}{100})^2 n$$

$$(1+\frac{r}{100})^2 \geq \frac{116}{100}(1+\frac{8}{100})^2$$

$$(1+\frac{r}{100}) \geq \frac{\sqrt{116}}{10}(1+\frac{8}{100})$$

$$100+r \geq \sqrt{116}\cdot 10{,}8$$

$$r \geq \sqrt{116}\cdot 10{,}8-100$$

$$\sqrt{116} > 10{,}77$$

$$r \geq 10{,}77\cdot 10{,}8-100 = 16{,}64$$

$$\underline{r = 17}$$

Задача 5

Часть денег от суммы *400* млн. рублей размещена в банке под *12%* годовых, а другая часть инвестирована в производство, причем через год эффективность вложения ожидается в размере *250%* (т.е. вложенная сумма x млн. рублей оборачивается в капитал $2,5x$ млн. рублей), затем отчисляются деньги на издержки, которые задаются квадратичной зависимостью $0,0022x^2$. Разность между капиталом и издержками в производстве облагается налогом в *20%*. Как распределить капитал между банком и производством, чтобы через год получить общую максимальную прибыль от размещения денег в банк и вложения денег в производство? Сколько млн. рублей составит эта прибыль?

Решение.

	Производство	**Банк**
Вложено	x	$400-x$ (*под 12% год*)
Через год	$2,5x$	$1,12(400-x)$
Издержки	$0,0022\,x^2$	
Налог	$20\ \%$	
Итого	$0,8(2,5x-0,0022\ x^2)$	$1,12(400-x)$

Функция прибыли

$$f(x)=1,12(400-x)+0,8\cdot(2,5x-0,0022x^2)-400$$

$$f(x)=-0,8\cdot 0,0022x^2+0,88x+48.$$

$$f_{наиб}=f(250)=-0,8\cdot 0,0022\cdot 250^2+0,88\cdot 250+48=$$

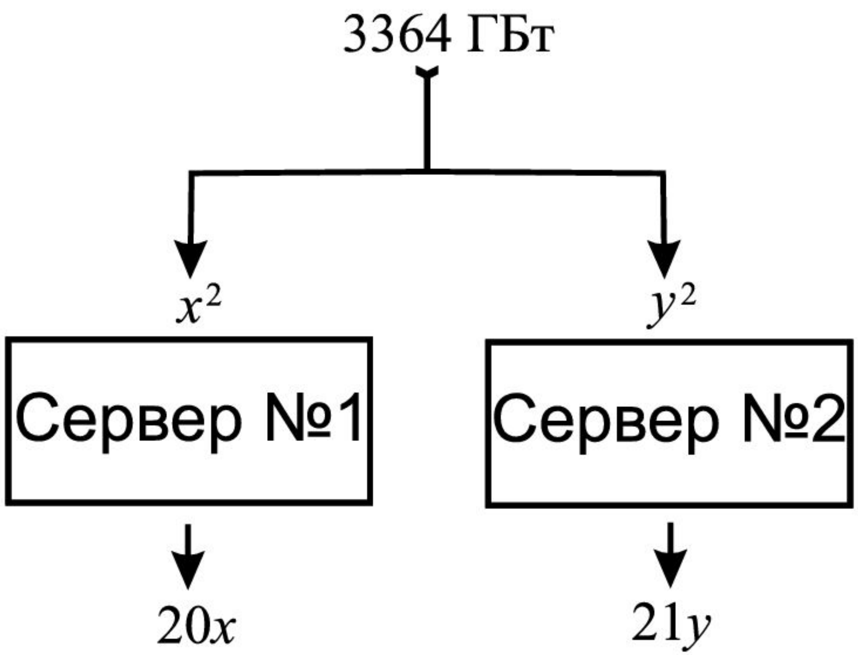
$=-110+220+48=158$ (млн. рублей).

Ответ: 158

Задача 6

Первичная информация разделяется по серверам №1 и №2 и обрабатывается на них. С сервера №1 при объёме t^2 Гбайт входящей в него информации выходит $20t$ Гбайт, а с сервера №2 при объёме t^2 Гбайт входящей в него информации выходит $21t$ Гбайт обработанной информации; $25 \le t \le 55$. Каков наибольший общий объём выходящей информации при общем объёме входящей информации в 3364 Гбайт?

Решение. способ 1



Пусть на сервере №1 обрабатывается x^2, а на сервере №2 обрабатывается y^2 Гбайт из всей первичной информации. Тогда $x^2 + y^2 = 3364$, а обработано будет $20x + 21y$ Гбайт информации. Требуется найти максимум суммы $20x + 21y$ при условии

$$x^2 + y^2 = 3364, \quad 25 \le x \le 55, \quad 25 \le y \le 55.$$

Так как $3364 = 58^2$, то $x = 58\cos\alpha$, $y = 58\sin\alpha$ для некоторого угла $\alpha \in [0;\ \pi/2]$. Так как $20^2 + 21^2 = 29^2$, то

$$20x + 21y = 58(20\cos\alpha + 21\sin\alpha) = 58\cdot 29\left(\frac{20}{29}\cos\alpha + \frac{21}{29}\sin\alpha\right) = 58\cdot 29\sin(\alpha + \varphi)$$

для вспомогательного угла φ с $\cos\varphi = \frac{21}{29}$, $\sin\varphi = \frac{20}{29}$. Следовательно, наибольшее значение суммы $20x + 21y$ равно $58\cdot 29 = 1682$. Оно достигается при

$\cos\alpha = \frac{20}{29}$, $\sin\alpha = \frac{21}{29}$, $x = 40$, $y = 42$, т.е. для значений, удовлетворяющих условиям $25 \le x \le 55$, $25 \le y \le 55$.

Ответ: 1682.

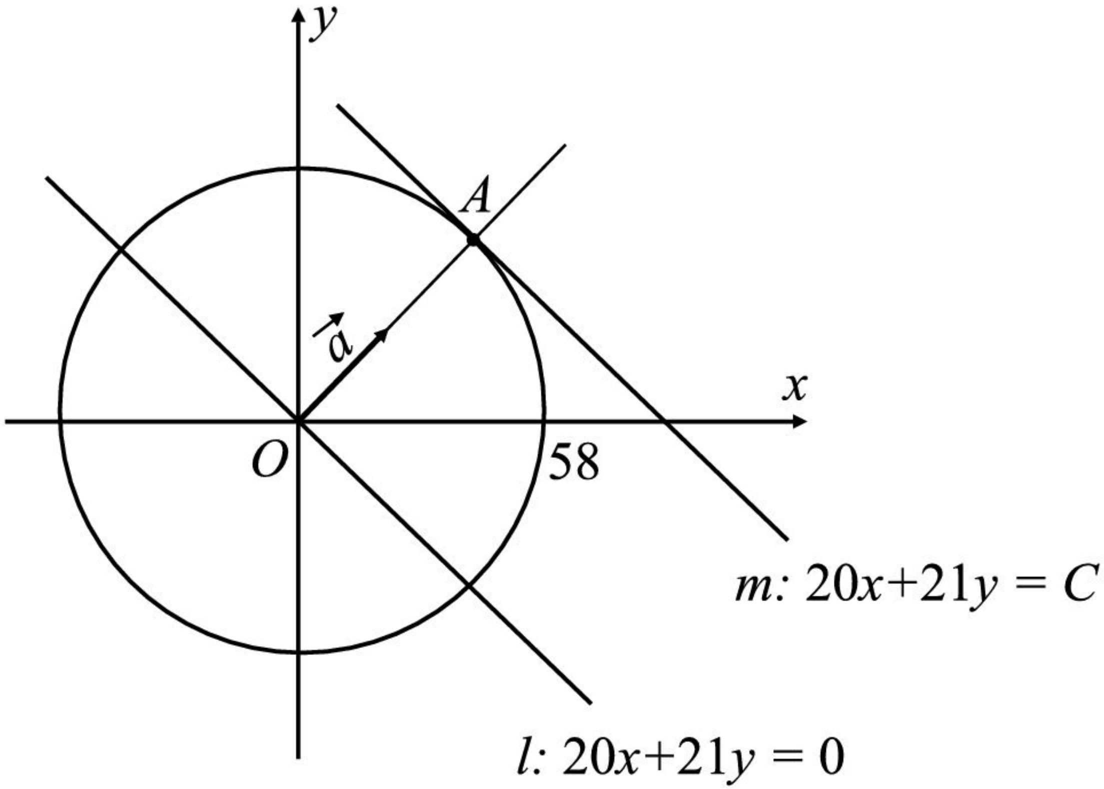
Способ 2

Пусть на сервере №1 обрабатывается x^2, а на сервере №2 обрабатывается y^2 Гбайт из всей первичной информации. Тогда $x^2+y^2=3364$, а обработано будет $20x+21y$ Гбайт информации. Выразим y через x: $y=\sqrt{3364-x^2}$. Требуется найти наибольшее значение функции $f(x)=20x+21\sqrt{3364-x^2}$.

$$f'(x)=20-\frac{21x}{\sqrt{3364-x^2}},\quad f'(x)=0,\quad 400=\frac{441x^2}{3364-x^2},\quad x^2=\frac{400\cdot 3364}{841}=1600,\quad x=40.$$

Поэтому $x=40$ единственная критическая точка и $y=\sqrt{3364-1600}=42$. Условия $25\le x\le 55$, $25\le y\le 55$ выполнены. Если $x<40$, то $x^2<1600$, $400>\dfrac{441x^2}{3364-x^2}$ и $f'(x)>0$. Если $x>40$, то $f'(x)<0$. Поэтому $x=40$ есть точка максимума. Значит, $f_{наиб}=f(40)=20\cdot 40+21\cdot 42=1682$.

Ответ: 1682.



Способ 3

Пусть на сервере №1 обрабатывается x^2, а на сервере №2 обрабатывается y^2 Гбайт из всей первичной информации. Тогда $x^2 + y^2 = 3364$, а обработано будет $20x + 21y$ Гбайт информации.

Так как $3364 = 58^2$, то $x^2 + y^2 = 3364$ задает окружность ω радиуса 58 с центром в начале координат. Проведем целевой вектор $\vec{a}(20;21)$ и перпендикулярную ему прямую $l: 20x + 21y = 0$, проходящую через начало координат. Луч, коллинеарный вектору $\vec{a}(20;21)$, пересечёт окружность ω в точке $A(40;42)$. Прямая m проходящая через точку $A(40;42)$ и перпендикулярная вектору $\vec{a}(20;21)$ будет касаться окружности ω и задаваться уравнением $m: 20x + 21y = C$ со значением C, наибольшим среди всех прямых параллельных l и пересекающих ω.

Условия $25 \le x \le 55$, $25 \le y \le 55$ для точки $A(40;42)$ выполнены. Значит,

$$C_{наиб} = 20 \cdot 40 + 21 \cdot 42 = 1682.$$

Ответ: 1682.

Задача 7

В банк помещён вклад 64 000 рублей под 25% годовых. В конце каждого из первых трёх лет (после начисления процентов) вкладчик дополнительно положил на счёт одну и ту же фиксированную сумму. К концу четвёртого года после начисления процентов оказалось, что он составляет 385 000 рублей. Какую сумму (в рублях) ежегодно добавлял вкладчик?

Решение.

Пусть х рублей вкладчик добавлял в конце каждого из первых трёх лет. Тогда на счету в конце

1-го года *1,25·64 000+х =80 000+х* рублей, в конце

2-го года – *1,25(80 000+х)+х* рублей, в конце

3-го года – *1,25 (1,25(80 000+х)+х)+х* рублей, в конце

4-го года – *1,25(1,25 (1,25(80 000+х)+х)+х) =385 000* рублей

$$\frac{5}{4}\cdot\left(\frac{5}{4}\cdot(80\,000+x)+x\right)+x=308\,000 \text{ и } \frac{25}{16}\cdot(80\,000+x)+\frac{5x}{4}+x=308\,000;$$

$$125\,000+\frac{25x}{16}+\frac{5x}{4}+x=308\,000;\ \frac{61x}{16}=183\,000;\ x=48\,000.$$

Ответ: 48 000.

Задача 8

Семён Петрович положил 8000 рублей в сберегательный банк. По истечении года к его вкладу были добавлены деньги, начисленные в качестве процентов, и, помимо этого, Семён Петрович увеличил свой вклад на 1360 рублей. Ещё через год он решил снять 1440 рублей, а остальные 9360 рублей положил на новый срок. Чему равна процентная ставкаа в этом банке?

Решение. Пусть процентная ставка в этом банке равна $p\%$. Тогда через год вклад Семёна Петровича будет

$\left(8000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) + 1360\right)$ рублей.

По условию получаем уравнение

$$\left(8000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) + 1360\right) \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) - 1440 = 9360.$$

Отсюда $\left(8000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) + 1360\right) \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) - 10\,800 = 0,$

$$8000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 + 1360 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) - 10\,800 = 0.$$

$$8000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 + 1360 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) - 10\,800 = 0.$$

Пусть $1 + \dfrac{p}{100} = x \;\; (x > 0)$, тогда

$8000 \cdot x^2 + 1360 \cdot x - 10\,800 = 0,$

$100 \cdot x^2 + 17 \cdot x - 135 = 0,$

$$x_{1,2} = \frac{-17 \pm \sqrt{289 + 54\,000}}{200} = \frac{-17 \pm 233}{200}.$$

$$x = \frac{216}{200} = \frac{108}{100} = 1 + \frac{8}{100}.$$

Это означает, что $p = 8$.

Ответ: 8%.

Задача 9

Банк предлагает два вида вкладов, «Стабильный» и «Прогрессивный». Вклад «Стабильный» имеет процентную ставку 10% годовых. Вклад «Прогрессивный» — 6% за первый год и $p\%$, начиная со второго года. Проценты по вкладу начисляются раз в год и прибавляются к текущей сумме вклада. Найдите наименьшее целое p, при котором трёхлетний вклад «Прогрессивный» окажется выгоднее, чем «Стабильный».

Решение. Пусть размер вклада равен S.

Вклад «Стабильный» через 3 года — $(1{,}1)^3 S$.

Вклад «Прогрессивный» после первого года будет $(1{,}06)S$, после второго года — $(1 + p/100) \cdot (1{,}06) \cdot S$, а после третьего года — $(1 + p/100)^2 \cdot (1{,}06) \cdot S$.

«Прогрессивный» вклад выгоднее, когда

$$(1 + p/100)^2 \cdot 1{,}06 \cdot S > (1{,}1)^3 S;$$

$$(1 + p/100)^2 \cdot 1{,}06 \cdot S > (1{,}1)^3 S;$$

$$(1 + p/100)^2 > \frac{(1{,}1)^3}{1{,}06};$$

$$\left(\frac{100 + p}{100}\right)^2 > \frac{1{,}331}{1{,}06};$$

$$(100 + p)^2 > \frac{1{,}331 \cdot 100^2}{1{,}06} = \frac{1\,331\,000}{106} = 12\,556{,}6\ldots;$$

$$100 + p > \sqrt{12\,556{,}6\ldots}.$$

$$100 + p > \sqrt{12\,556{,}6\ldots}.$$

Число p целое, тогда $(100 + p)$ — тоже целое. Вычислим два последовательных целых числа, между которыми лежит $\sqrt{12\,556{,}6\ldots}$.

$$110^2 = 12\,100,\ 111^2 = 12\,321,\ 112^2 = 12\,554,\ 113^2 = 12\,769,$$

значит $112^2 < 12\,556{,}6\ldots < 113^2$. Отсюда

$$112 < \sqrt{12\,556{,}6\ldots} < 113.$$

Так как $(100 + p)$ целое число, то $100 + p \geqslant 113$, $p \geqslant 13$. Значит, нам подходит любое $p \geqslant 13$, а наименьшее подходящее p равно 13.

Ответ: 13.

Задача 10

Семен Петрович положил 8000 рублей в сберегательный банк. По истечении года к его вкладу были добавлены деньги, начисленные в качестве процентов, и, помимо этого, Семен Петрович увеличил свой вклад на 1360 рублей. Еще через год он решил снять 1440 рублей, а остальные 9360 рублей положил на новый срок. Чему равна процентная ставка в этом банке?

Решение. Пусть процентная ставка в этом банке равна $p\%$.
Тогда через год вклад Семёна Петровича будет

$\left(8000\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)+1360\right)$ рублей.

По условию получаем уравнение

$$\left(8000\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)+1360\right)\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)-1440=9360.$$

Отсюда $\left(8000\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)+1360\right)\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)-10\,800=0,$

$$8000\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^2+1360\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)-10\,800=0.$$

$$8000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 + 1360 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) - 10\,800 = 0.$$

Пусть $1 + \dfrac{p}{100} = x \ (x > 0)$, тогда

$$8000 \cdot x^2 + 1360 \cdot x - 10\,800 = 0,$$
$$100 \cdot x^2 + 17 \cdot x - 135 = 0,$$
$$x_{1,2} = \frac{-17 \pm \sqrt{289 + 54\,000}}{200} = \frac{-17 \pm 233}{200}.$$

$$x = \frac{216}{200} = \frac{108}{100} = 1 + \frac{8}{100}.$$

Это означает, что $p = 8$.

Ответ: 8%.

Задача 11

Два вкладчика вложили деньги в общее дело. После этого один из них добавил ещё 4 млн. рублей, в результате чего его доля в общем деле возросла на 0,06. А когда он добавил ещё 4 млн. рублей, его доля возросла ещё на 0,02. Сколько денег ему нужно добавить, чтобы увеличить свою долю ещё на 0,03?

Решение.

Изначально: суммарный вклад — y млн. р.,

x млн. р. — первого вкладчика. Его доля — $\dfrac{x}{y}$.

После того, как первый добавил 4 млн. р.
суммарно вклад: $(y+4)$ млн. р.,
$(x+4)$ — первого вкладчика.

Его доля: $\dfrac{x+4}{y+4}$

$$\frac{x+4}{y+4} - \frac{x}{y} = 0{,}06$$

- $4(y - x) = 0{,}06y(y + 4).$

Затем $\frac{x+8}{y+8} - \frac{x+4}{y+4} = 0{,}02,$

- $4(y - x) = 0{,}02(y + 4)(y + 8)$

$0{,}06y(y + 4) = 0{,}02(y + 4)(y + 8)$

$6y = 2(y + 8)$

$y = 4$

$4(y-x)=0{,}06y(y+4)$
$4(4-x)=0{,}06\cdot 4\cdot (4+4)$
$x=3{,}52$
Если добавит ещё k млн. р.,

то $\dfrac{x+8+k}{y+8+k}$ — его доля.

$$\frac{x+8+k}{y+8+k}-\frac{x+8}{y+8}=0{,}03;$$

$$\frac{11{,}52+k}{12+k}-\frac{11{,}52}{12}=0{,}03$$

$$\frac{11{,}52+k}{12+k}-0{,}96=0{,}03;$$

$11{,}52+k=0{,}99(12+k)$
$11{,}52+k=11{,}88+0{,}99k$
$k=36.$
Ответ: 36 000 000 рублей

Кредиты

Задача 12

30 декабря 2014 года Сергей Михайлович взял в банке 800 000 рублей в кредит. План выплаты кредита — 30 числа каждого следующего месяца банк начисляет 2% на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивают долг на 2%), затем Сергей Михайлович переводит в банк платёж. На какое минимальное количество месяцев Сергей Михайлович может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 360 000 рублей?

Решение.

Предположим, что первые месяцы Сергей Михайлович будет выплачивать ровно по 360 000 рублей.

После первого месяца:
$1{,}02 \cdot 800\,000 = 816\,000$ рублей,
$816\,000 - 360\,000 = 456\,000$ рублей.

После второго месяца:
$1{,}02 \cdot 456\,000 = 465\,120$ рублей,
$465\,120 - 360\,000 = 105\,120$ рублей.

После третьего месяца:
$1{,}02 \cdot 105\,120 = 107\,222{,}4$ рублей,
$107\,222{,}4 - 107\,222{,}4 = 0$.

Ответ: 3

Задача 13

Алексей взял кредит в банке на срок 17 месяцев. По договору Алексей должен возвращать банку часть денег в конце каждого месяца.

В конце каждого месяца к оставшейся сумме основного долга добавляется *r*% этой суммы и своим ежемесячным платежом Алексей погашает эти добавленные проценты и уменьшает сумму долга.

Ежемесячные платежи подбираются так, чтобы сумма долга уменьшалась на одну и ту же величину каждый месяц (на практике такая схема называется «схемой с дифференцированными платежами»).

Известно, что общая сумма, выплаченная Алексеем банку за весь срок кредитования, оказалась на 27% больше, чем сумма, взятая им в долг. Найдите *r*.

Решение.

Месяц	Сумма	Начислено	Отдал	Должен
1	N	$N+\frac{r}{100}N$	$N+\frac{r}{100}N-\frac{16}{17}N$	$\frac{16}{17}N$
2	$\frac{16}{17}N$	$\frac{16}{17}N+\frac{r}{100}\cdot\frac{16}{17}N$	$\frac{16}{17}N+\frac{r}{100}\cdot\frac{16}{17}N-\frac{15}{17}N$	$\frac{15}{17}N$
3	$\frac{15}{17}N$	$\frac{15}{17}N+\frac{r}{100}\cdot\frac{15}{17}N$	$\frac{15}{17}N+\frac{r}{100}\cdot\frac{15}{17}N-\frac{14}{17}N$	$\frac{14}{17}N$
…	…	…	…	…
17	$\frac{1}{17}N$	$\frac{1}{17}N+\frac{r}{100}\cdot\frac{1}{17}N$	$\frac{1}{17}N+\frac{r}{100}\cdot\frac{1}{17}N$	0

$$N+\frac{r}{100}\left(N+\frac{16}{17}N+\frac{15}{17}N+\cdots+\frac{1}{17}N\right)=1{,}27N$$

$$\frac{r}{100\cdot 17}(17+16+15+\cdots+1)=0{,}27$$

$$\frac{r}{17}\cdot\frac{1+17}{2}\cdot 17=27$$

$$9r=27 \qquad r=3$$

Ответ. 3

Задача 14

Кредитование

Аркадий взял в кредит 1200 рублей на 3 года под 10% годовых (это означает, что в конце каждого года банк увеличивает долг на 10%). Составьте план погашения кредита по схеме с дифференцированными платежами (по истечении каждого года сумма долга уменьшается на одну и ту же величину).

Год	Процентный платёж	выплата долга	годовой взнос	остаток долга
	10%			1200
1	120	400	520	800
2	80	400	480	400
3	40	400	440	0

Задача 15

Клиент взял 15 960 000 рублей в кредит под 30% годовых. По истечении каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 30%), затем клиент переводит в банк определённую сумму ежегодного платежа. Какой должна быть сумма ежегодного платежа, чтобы клиент выплатил долг тремя равными ежегодными платежами?

Решение.

Пусть искомый ежегодный платёж — x рублей.

Долг в конце первого года:

$1{,}3 \cdot 15960000 - x = (20748000 - x)$ рублей.

В конце второго:

$(1{,}3 \cdot (20\,748\,000 - x) - x) = 26\,972\,400 - 2{,}3x$ рублей.

В конце третьего:

$1{,}3(26\,972\,400 - 2{,}3x) - x = 35\,064\,120 - 3{,}99x$ рублей.

$35\,064\,120 - 3{,}99x = 0$

$x = 8\,788\,000$

Ответ: 8 788 000 рублей

Задача 16

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 10 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после его полного погашения составит 18 млн рублей?

Решение.

n – срок кредита (целое число лет), 1-ая составляющая выплат – ежегодный платеж по кредиту x . Тогда

$$10$$
$$10-x$$
$$10-2x$$
$$\ldots,$$
$$10-nx$$

– последовательность выплат 1-ой составляющей по кредиту.

$$10-nx=0,$$

откуда

$$x = \frac{10}{n}$$

Долг перед банком (в млн рублей) по состоянию на июль
должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$10,\ \frac{10(n-1)}{n}, \ldots,\ \frac{10\cdot 2}{n},\ \frac{10}{n},\ 0.$$

Вторая составляющая — выплата процентной ставки

По условию, каждый январь долг возрастает на 20%, значит
последовательность размеров долга (в млн рублей) в январе
такова:

$$12,\ \frac{12(n-1)}{n}, \ldots,\ \frac{12\cdot 2}{n},\ \frac{12}{n},\ 0.$$

Последовательность процентов на остаток долга

$$2,\ \frac{2(n-1)}{n},\ \ldots\ \frac{2\cdot 2}{n},\ \frac{2\cdot 1}{n}$$

Следовательно, выплаты (в млн рублей) должны быть следующими:

$$2+\frac{10}{n},\ \frac{2(n-1)+10}{n},\ldots,\ \frac{4+10}{n},\ \frac{2+10}{n}.$$

Всего следует выплатить

$$10+2\cdot\left(\frac{n+(n-1)+\ldots+2+1}{n}\right)=10+2\cdot\frac{n+1}{2}=n+11(\text{млн рублей}).$$

Общая сумма выплат равна 18 млн рублей, поэтому $n=7$.

Ответ: 7.

Критерии

Содержание критерия, задание 17	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели и получен результат: — неверный ответ из-за вычислительной ошибки; — верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

$S = K\left(1+\frac{P}{100}\right)^N$ – имеем формулу для расчета кредита.

S (окончательная сумма) – из условия 18 000 000 (18 млн. руб.)

K (первоначальная сумма (т.е. сумма кредита)) 10 000 000 (10 млн. руб.)

P – (процентная ставка) = 20%

N – (число периодов: в данном случае число целых лет) = ?

$18\,000\,000 = 10\,000\,000\left(1+\frac{20}{100}\right)^N$

$18\,000\,000 = 10\,000\,000 \cdot (1,2)^N$

$18 = 10 \cdot (1,2)^N$

$9 = 5 \cdot 1,2^N$, $\quad 1,2^N = \frac{9}{5}$. $\quad N = 4$.

Докажем правильность ответа на практике.

1) 10 млн + 20% – (18 млн : 4) = 12 000 000 – 4 500 000 = 7 500 000 (ост. долга)

2 год) 7 500 000 + 20% – 4 500 000 = 4 500 000 (ост. долга)

3 год) 4 500 000 + 20% – 4 500 000 = 900 000 (ост. долга)

4 год) 900 000 + 20% – 4 500 000 < 0, т.е. долг полностью погашен ⇒ кредит возьмут на 4 года.

ответ: 4.

Оценка эксперта:

0 баллов

Задача 17

15-го января был выдан кредит на развитие бизнеса. В таблице представлен график его погашения. Текущий долг (ТД) выражается в процентах от кредита.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
ТД	100%	90%	80%	70%	60%	50%	0%

В конце каждого месяца, начиная с января, текущий долг увеличивается на 4%, а выплаты по погашению кредита происходили в первой половине каждого месяца, начиная с февраля. На сколько процентов общая сумма выплат при таких условиях больше суммы самого кредита?

Решение.

Пусть S – сумма кредита.

$1{,}04(S+0{,}9S+0{,}8S+0{,}7S+0{,}6S+0{,}5S)-$
$-(S+0{,}9S+0{,}8S+0{,}7S+0{,}6S+0{,}5S)=$

$=0{,}04(S+0{,}9S+0{,}8S+0{,}7S+0{,}6S+0{,}5S) = 0{,}04\cdot 4{,}5S=0{,}18S.$

Переплата составит 18%.

Ответ. 18 %

Задача 18

В июле 2017 года планируется взять кредит в банке на три года в размере S млн рублей, где S — целое число. Условия его возврата таковы:
– каждый январь долг увеличивается на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
– в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019	Июль 2020
Долг	S	$0{,}7S$	$0{,}4S$	0

Найдите наименьшее значение S, при котором каждая из выплат будет больше 3 млн рублей.

Решение. Пусть S — сумма кредита; x_1, x_2, x_3 — выплаты с февраля по июнь каждого года. Начисление 25% соответствует умножению на коэффициент $1 + \frac{25}{100} = 1{,}25$. Составим уравнения, которые соответствуют графику погашения кредита:

$$\begin{aligned} 2018\text{ г.}: &\quad 1{,}25S - x_1 = 0{,}7S, \\ 2019\text{ г.}: &\quad 1{,}25 \cdot 0{,}7S - x_2 = 0{,}4S, \\ 2020\text{ г.}: &\quad 1{,}25 \cdot 0{,}4S - x_3 = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, выплаты с февраля по июнь каждого года составляют

$$x_1 = 0{,}55S;\ x_2 = 0{,}475S;\ x_3 = 0{,}5S.$$

Наименьшая из выплат должна быть больше 3 млн рублей:

$$0{,}475S > 3,\ S > 3 \cdot \frac{1000}{475},\ S > 3 \cdot \frac{40}{19},\ S > 6\frac{6}{19}.$$

Наименьшим целым числом, удовлетворяющим последнему неравенству, является $S = 7$.

Ответ: 7.

Задача 19

В июле 2017 года планируется взять кредит в банке в размере S тыс. рублей, где S — натуральное число, на 3 года. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;

– в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019	Июль 2020
Долг	S	$0{,}75S$	$0{,}3S$	0

Найдите наименьшее значение S, при котором каждая из выплат будет составлять целое число тысяч рублей.

Решение. Долг перед банком (в тыс. рублей) по состоянию на июль каждого года должен уменьшаться до нуля следующим образом:

$$S;\ 0{,}75S;\ 0{,}3S;\ 0.$$

Первый год:

$1{,}2S - x_1 = 0{,}75S, \quad x_1 = 0{,}45S;$

второй год:

$1{,}2 \cdot 0{,}75S - x_2 = 0{,}3S, \quad x_2 = 0{,}54S;$

третий год:

$1{,}2 \cdot 0{,}3S - x_3 = 0, \quad x_3 = 0{,}36S.$

По условию числа

$$S;\ \frac{9S}{20};\ \frac{27S}{50};\ \frac{9S}{25}$$

должны быть целыми. Значит, число S должно делиться на 20, 50 и 25. Наименьшее общее кратное этих чисел равно 100.

Ответ: 100 тысяч рублей.

Книги можно заказать в нашем интернет-магазине на сайте:
www.legionr.ru

Спрашивайте
в книжных магазинах города!

Спасибо за внимание!