

Задачи математического и линейного программирования

Общая задача математического программирования формулируется следующим образом: найти экстремум целевой функции



$$Z(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \max(\min)$$

(1)

при системе ограничений на переменные

$$\begin{cases} \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, & i = 1, 2, \dots, k, \\ \varphi_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq (\geq) 0, & j = k+1, k+2, \dots, m. \end{cases}$$

(2)

Итак, математическое программирование – это раздел математики, посвящённый решению задач, связанных с нахождением экстремумов функций нескольких переменных при наличии ограничений на переменные.

Если целевая функция

(1)

$$Z(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \max(\min)$$

и система ограничений

(2)

$$\begin{cases} \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, & i = 1, 2, \dots, k, \\ \varphi_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq (\geq) 0, & j = k + 1, k + 2, \dots, m. \end{cases}$$

линейны, то задача математического программирования называется задачей

Задача использования ресурсов

Для изготовления нескольких видов продукции P_1, P_2, \dots, P_n используют m видов ресурсов S_1, S_2, \dots, S_m (например, различные материалы, электроэнергию и т.д.).

Объём каждого вида ресурсов ограничен и известен:

$$(b_1, b_2, \dots, b_m)$$

a_{ij}

$$(i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n) -$$

Известно также

количество каждого вида ресурса, расходуемого на производство единицы j -го вида продукции.

Кроме того, известна прибыль (c_1, c_2, \dots, c_n) получаемая от реализации единицы каждого вида продукции

Табл. 1

Вид ресурсов	Объём ресурсов	a_{ij}			
		P_1	P_2	P_n
S_1	b_1	a_{11}	a_{12}	a_{1n}
S_2	b_2	a_{21}	a_{22}	a_{2n}
·	·	·	·	·
·	·	·	·	·
·	·	·	·	·
S_m	b_m	a_{m1}	a_{m2}	a_{mn}
Прибыль		c_1	c_2	c_n

Пусть x_j ($j = 1, 2, \dots, n$) – количество каждого вида продукции, которое необходимо произвести.

Для первого ресурса имеет место неравенство-ограничение

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

Аналогичные неравенства будут и для остальных $x_j \geq 0$, $j = 1, 2, \dots, n$. Следует учитывать, что все значения

Общая прибыль, получаемая от реализации продукции может быть представлена как функция $Z(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$ для которой нужно найти максимальное значение.

Таким образом, математическая задача запишется в виде:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2; \\ \dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m; \end{cases} \quad x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (5)$$

Каноническая форма задачи линейного программирования

- В случае, когда все ограничения являются уравнениями и все переменные удовлетворяют условию неотрицательности, задачу линейного программирования называют канонической. Она может быть представлена в координатной, векторной или матричной форме записи.

- ▣ б) каноническая задача ЛП в векторной форме имеет вид:

$$Z(X) = C \cdot X \rightarrow \max(\min)$$

(7)

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_n x_n = B$$

$$X \geq \Theta$$

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$$

где

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \quad j = 1, 2, \dots, n \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad \Theta = (0, 0, \dots, 0)$$

- в) каноническая задача ЛП в матричной форме имеет вид:

$$Z(X) = CX \rightarrow \max(\min)$$

$$AX = B$$

$$X \geq \Theta$$

- где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Приведение общей задачи линейного программирования к канонической форме

При составлении математических моделей экономических задач ограничения в основном формируются в системы неравенств. Поэтому необходимо уметь переходить от них к системам уравнений. Например, линейное неравенство

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b$$

(8)

x_{n+1}

и прибавим к его левой части некоторую величину

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + x_{n+1} = b \quad \text{это превращает} \quad x_{n+1} = b - a_1x_1 - a_2x_2 - \dots - a_nx_n$$

$$(9) \quad x_{n+1} \geq 0$$

Неотрицательная переменная называется дополнительной переменной.

Следующая теорема даёт основание для возможности такого преобразования.

Теорема 1.

Каждому решению $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ неравенства (8) соответствует единственное решение $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \beta_{n+1})$ уравнения (9) и неравенства $x_{n+1} \geq 0$, и, наоборот, каждому решению уравнения (9) $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \beta_{n+1})$ $\beta_{n+1} \geq 0$ соответствует решение $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ неравенства (8).

Дока: $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ — р.

$a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + \dots + a_n\beta_n \leq b$ — решение неравенства (8).

Тогда

$$\beta_{n+1} = b - (a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + \dots + a_n\beta_n)$$

$$\beta_{n+1} \geq 0$$

Возьмём число $\beta_{n+1} = b - (a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + \dots + a_n\beta_n)$. Ясно, что $(a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + \dots + a_n\beta_n) = b - \beta_{n+1}$.

Подставив в уравнение (9), получим

Пусть теперь вектор $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \beta_{n+1})$

удовлетворяет условию $\beta_{n+1} \geq 0$ уравнению $a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + \dots + a_n\beta_n + \beta_{n+1} = b$

Отбрасывая в левой части последнего равенства неотрицательную величину β_{n+1} , получаем

$a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + \dots + a_n\beta_n \leq b$, и т.д.



Таким образом, доказанная теорема фактически устанавливает возможность приведения всякой задачи ЛП к каноническому виду. Для этого достаточно в каждое ограничение, имеющее вид неравенства, ввести свою дополнительную неотрицательную переменную.

Замечание.

В дальнейшем мы будем излагать симплекс-метод для канонической задачи ЛП при исследовании целевой функции на минимум. В тех задачах, где требуется найти максимум $Z(X)$, достаточно рассмотреть функцию $-Z(X)$, найти её минимальное значение, а затем, меняя знак на противоположный, определить искомого максимальное значение $Z(X)$.